



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

O USO DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA NA FORMALIZAÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS DESCONHECIDAS POR MEIO DA REGRA DOS TRAPÉZIOS

SANTOS, Paula Roberta dos¹; OLIVEIRA, Claudimary Moreira Silva²; VAZ, Duelci
Aparecido de Freitas³

UEG Universidade Estadual de Goiás, Câmpus Iporá, Instituto Federal de Educação,
Ciências e Tecnologia de Goiás, Câmpus Jataí

¹paularobertaipo@hotmail.com, ²clau.moreira@ueg.br, ³duelci.vaz@ig.com.br

RESUMO

Este trabalho traz uma análise do uso da metodologia Investigação Matemática com o Geogebra em uma atividade sobre Integral Numérica para uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Iporá/GO. Trata-se de uma pesquisa qualitativa desenvolvida no Estágio Supervisionado do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Goiás, Câmpus Iporá. Os instrumentos para coleta de dados foram os relatórios dos alunos, as fotos, as atividades desenvolvidas em sala de aula, as construções no Geogebra e as anotações realizadas durante as aulas em que se registrou momentos e situações acontecidos durante as atividades de investigação, as estratégias usadas na resolução dos problemas. Como o trabalho realizado percebe-se que a Investigação Matemática com o Geogebra pode ser utilizada como aliada no trabalho pedagógico por motivar o aluno a participar ativamente na construção do seu conhecimento. Os resultados indicam que o Geogebra, por ser um software dinâmico, pode contribuir para a realização da Investigação Matemática possibilitando que os alunos atuem como investigadores matemáticos passando pelas fases do experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar os conceitos construindo assim, nas suas próprias ações os seus próprios conhecimentos.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Software Geogebra. Ensino de matemática.

INTRODUÇÃO

Este trabalho é resultado de uma pesquisa realizada durante o Estágio



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID

“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”

ISSN: 2238-8451

Supervisionado da quarta série do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Goiás. Traz uma análise do uso Investigação Matemática em sala de aula e das contribuições do software Geogebra no processo investigativo. A metodologia aqui sugerida, é uma forma diferenciada de construção do conhecimento por meio da Investigação Matemática como o software Geogebra.

A pesquisa se desenvolveu em uma turma de alunos do terceiro ano do Ensino Médio da cidade de Iporá/GO com o objetivo de analisar metodologia de Investigação Matemática em sala de aula usando o software educacional Geogebra para o ensino de do conteúdo Integral Numérica. Os resultados indicam que a Investigação Matemática com o Geogebra pode ser utilizada como aliada no trabalho pedagógico por possibilitar que o aluno participe ativamente na construção do seu conhecimento por meio da vivência das fases investigativas no levantamento de conjecturas, na experimentação e na formalização matemática dos conteúdos.

A relevância está no fato de representar uma forma inovadora de ensinar e aprender matemática, contribuindo assim para que aconteçam as mudanças necessárias no Ensino de Matemática.

REFERENCIAL TEÓRICO

O ensino de matemática historicamente tem sido alvo de críticas devido os resultados negativos produzidos e divulgados nos meios de comunicação. Tais críticas indicam a necessidade de pesquisas com o objetivo de se encontrar caminhos para minimizar as deficiências que os alunos apresentam e que seriam atribuídas em grande escala ao fato de que na maioria das escolas o trabalho pedagógico se realiza por meio de aulas expositivas e descontextualizadas em que o aluno tem papel de receptor passivo. Segundo Vaz:

constata-se ainda que a metodologia de ensino do professor, na maioria dos casos, é quase sempre informativa. Tal atitude tem sido foco de críticas por partes de renomados pesquisadores. Caracterizada pela



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

ansiedade do professor em ministrar novos conteúdos concebendo o aluno como receptor, expõe visivelmente a dicotomia entre o sujeito e o objeto do conhecimento. (2012, p. 42)

A Investigação Matemática pode se apresentar como uma oportunidade para que esta concepção de ensino seja reconstruída por tratar-se de uma metodologia de ensino pela qual o professor com a sua mediação, por meio de aulas investigativas proporciona um ambiente em que o aluno é ator na construção de seus conhecimentos, passando pelas fases de experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar conceitos matemáticos. Para Ponte; Brocardo e Oliveira:

[...] a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Estes momentos surgem, muitas vezes, em simultâneo: a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, etc. (2013, p. 20).

De acordo com estes autores a metodologia de Investigação Matemática pode ser uma boa proposta, porém é necessário que os professores se proponham a adequar suas aulas a mesma, sendo que para essa desenvoltura é preciso que o professor esteja preparado não só com o conhecimento do conteúdo como da forma de conduzir a investigação.

A realização de investigações proporciona, muitas vezes, o estabelecimento de conexões com outros conceitos matemáticos e até mesmo extramatemáticos. O professor precisa estar atento a tais oportunidades e, mesmo que não seja possível explorar cabalmente essas conexões, deve estimular os alunos a refletir sobre elas. (id. p. 51).



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID

*“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”*

ISSN: 2238-8451

Neste sentido os autores completam, "O sucesso de uma investigação depende também, tal como de qualquer outra proposta do professor, do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula." (id, p. 28).

Assim acredita-se que essa forma de ensinar, partindo da investigação realizada pelo próprio aluno em sala de aula pode altera-se o nível de conhecimento dos alunos pela mobilização dos seus modos de aprender e interpretar a matemática. "O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo." (2013, id, p. 23). Este é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. E como é condição fundamental que o aluno esteja ativamente envolvido é preciso que o professor trabalhe juntamente com o aluno exercendo o papel de mediador do conhecimento de forma que um aprenda com o outro por meio de um diálogo multilateral.

Neste aspecto, a proposta é trabalhar com o educando uma forma flexível e significativa de estudar os conteúdos matemáticos e pode abranger atividades com materiais concretos e diversas tecnologias informatizadas, incluindo os softwares educacionais. Nesta mesma ideia, Mendes (2009, p. 15) para que possamos caminhar nesta direção é "importante refletirmos sobre a possibilidade de encaminhamento de uma prática em Educação Matemática que valorize a investigação e a busca de informações como princípio da aprendizagem e socialização coletiva das informações".

Dentre as várias possibilidades de ferramentas pedagógicas que podem ser usadas nas aulas investigativas, o software Geogebra, que possui ambiente dinâmico e tem se mostrado ser uma ferramenta satisfatória por vários pesquisadores da área de Educação Matemática como Vaz (2012), Cruz (2005), em decorrência do número de recursos e especialidades que apresenta. Pode ser usado para a formação de conceitos e definições matemáticas tendo como ponto de partida uma investigação em que o aluno vai construindo seus conhecimentos com a mediação do professor. Nesta perspectiva



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID

*“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”*

ISSN: 2238-8451

esse recurso possibilita uma visão inovadora para os alunos e para os professores de matemática.

O Geogebra é um software de fácil manuseio em que até mesmo os alunos do ensino básico têm a facilidade de aprender a usá-lo, por ser um software dinâmico que permite ao aluno estabelecer relações por meio do uso das suas ferramentas e das construções realizadas. De acordo com Lorenzato (2010, p. 96) assim "os alunos em sala de aula passam a observar, registrar e documentar as atividades discutidas, relacionadas, e ideias importantes que surgem na investigação realizada, considerando as experiências, as conjecturas, os dados colhidos e aspectos relacionados à experimentação.

Permite então que o aluno construa seu próprio conhecimento por meio dos objetos que podem ser encontrados ou construídos por ele no software. Nesse sentido, o Geogebra torna-se uma ferramenta propícia à Investigação Matemática em sala de aula por possibilitar ao aluno analisar suas construções, experimentar, reconstruir, comprovar ou refutar hipóteses e conseguir, na sua relação de interação com o software, edificar conceitos e formalizar as situações matemáticas.

Assim, o Software Geogebra mostra-se satisfatório para realização da atividade investigativa, podendo contribuir de forma que os alunos experimentem suas hipóteses e as comprovem por meio de ferramentas desse software. São recursos matemáticos variados que permitem a exploração de vários conteúdos de matemática além de trazerem uma visão inovadora para os professores desta disciplina.

MATERIAIS E MÉTODO

Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo que tem embasamento teórico em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), Lorenzato (2010), Mendes (2009) e Vaz (2012), entre outros que defendem a Investigação Matemática em sala de aula como metodologia de ensino. Foi planejada e desenvolvida a partir das atividades de



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID

*“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”*

ISSN: 2238-8451

pesquisa desenvolvidas no Grupo de Pesquisa do Projeto de Mestrado de uma professora de Estágio Supervisionado da Universidade Estadual de Goiás e dos estudos realizados nos encontros de orientação do Estágio Supervisionado.

Esta proposta de atividade foi planejada coletivamente durante os estudos do Grupo de Pesquisa do Projeto de Mestrado da professora de Estágio Supervisionado e que também é aluna do curso de Mestrado Profissional em Educação, Ciências e Matemática do Instituto Federal de Goiás, Câmpus de Jataí. As atividades de pesquisa, a elaboração da atividade, as aulas experimentais e a análise das aulas se desenvolveram durante as orientações e a regência do Estágio Supervisionado sob orientação e supervisão da professora orientadora. Contou-se também com as colaborações do professor Ms. Renato Assis Ribeiro da Universidade Estadual de Goiás, Câmpus Iporá que auxiliou na elaboração do plano de atividades e do professor Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz do Instituto Federal de Goiás, Câmpus Jataí que orientou no planejamento e na análise das atividades experimentais.

Os instrumentos para coleta de dados foram os relatórios dos alunos, as fotos, as atividades desenvolvidas em sala de aula, as construções no Geogebra e as anotações realizadas durante as aulas em que se registrou momentos e situações acontecidos durante as atividades de investigação, as estratégias usadas na resolução dos problemas.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A atividade proposta teve como ponto de partida a elaboração de uma sequência pedagógica para ser desenvolvida em sala de aula. O conteúdo a ser desenvolvido foi cálculo de áreas desconhecidas por meio da Regra dos Trapézios. O projeto foi desenvolvido em uma turma de 14 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma grande escola pública da cidade de Iporá, Goiás. Os alunos possuem média de idade de



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

17 anos e segundo relato da professora de Matemática, não apresentam grandes dificuldades nessa disciplina.

A questão planejada para investigação dos alunos foi: como calcular a áreas de figuras desconhecidas se as fórmulas que conhecemos não forem suficientes para isto? O objetivo foi que os alunos conseguissem formalizar e generalizar a regra dos trapézios por meio da Investigação Matemática com uso do software Geogebra. Assim eles passariam a conhecer um princípio geral de cálculo de áreas e de volumes que poderia ser aplicado em diversas outras situações.

No desenvolvimento da sequência de atividades levaram-se em consideração os passos da Investigação Matemática proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), que consideram essa metodologia de ensino como uma forma de atividade em que se valorizam os processos matemáticos pela vivência das fases do conjecturar, experimentar, formalizar e generalizar os conceitos matemáticos. O tempo previsto para o desenvolvimento das atividades foi de aproximadamente 10 horas/aulas.

Etapa 1: O recursos do Geogebra e os conteúdos pré-requisitos

Esta aula teve a finalidade de relembrar alguns conceitos básicos de geometria e serviu também para diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao cálculo da área de regiões planas e superfícies por meio da exploração das ferramentas do software Geogebra. Vários desafios foram propostos com o objetivo de relembrar a ideia de pontos e retas, relembrar conceitos de segmento-de-reta, plano, polígono, poliedros e outros conceitos básicos de geometria, além de relembrar como se calcula áreas de formas planas e, espaciais e áreas de formas desconhecidas pela soma das áreas de figuras conhecidas. Após a exploração dos recursos do Geogebra em sala de aula convencional propôs-se a resolução de problemas cotidianos em que fosse possível o cálculo de áreas de regiões planas e espaciais pela soma de áreas de polígonos conhecidos.

Concluiu-se esta etapa com a socialização das resoluções e discussão coletiva



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

dos resultados. Todas as atividades até aqui, foram realizadas lembrando o que diz Ponte, Brocardo e Oliveira "Uma aula de Investigação matemática habitualmente tem início com a introdução do assunto pelo professor que dá origem ao problema." (2013, p. 41). Deste primeiro contato dos alunos com o conteúdo e com o software é que foi proposta a questão que será investigada na próxima etapa. A figura 01 mostra a atuação dos alunos em sala de aula.



Figura 01. Os alunos apresentam as estratégias usadas na resolução dos problemas.

Nesta primeira aula foi perceptível que os alunos da turma possuíam razoável conhecimento dos conceitos básicos de geometria e não apresentavam grande dificuldade nos cálculos matemáticos confirmando o que já havia informado a professora da turma. Conheciam também as fórmulas básicas para o cálculo de área de regiões planas e para o cálculo de volumes dos sólidos mais comuns como o cubo, o cilindro e os prismas. Identificou-se também que conheciam a forma geométrica da elipse e os elementos que a constituem. Isto nos deixou bastante animados porque estes conhecimentos são pré-requisitos para a investigação a ser proposta na etapa seguinte.

Etapa 2: O uso do software Geogebra e a Investigação Matemática na sala de aula

Ao iniciar esta etapa, como a turma não estava habituada a desenvolver atividades investigativas, a atenção inicial foi fazer com que os alunos compreendessem como se daria o processo de investigação durante a aula. Procurou-se deixar claro o que



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

seria esperado deles em cada fase, desde a formulação da questão a ser investigada, passando pela experimentação, levantamento de hipóteses ou conjecturas, novas experimentações, reformulação ou justificação das conjecturas iniciais tendo como resultado a formalização e generalização dos resultados que devem ser discutidos coletivamente ao final do trabalho. Era necessário, nesse momento, que os alunos compreendessem o que é e como iriam investigar, porque iriam investigar e que se esperava deles como resultado da investigação.

Antes de propor a questão de pesquisa foi solicitado para os alunos construírem uma elipse com os recursos do Software Geogebra. A escolha desta forma foi pelo fato de ser uma forma geométrica na qual não se é possível calcular a área com as fórmulas já conhecidas por eles, mas existe uma fórmula para calcular a área da elipse. Perguntou-se aos alunos se conheciam algumas fórmulas para se calcular a área da elipse. Responderam que não. Então se propôs a seguinte questão: Como calcular a área da elipse? Que estratégias poderiam ser usadas para tornar possível o cálculo da área de uma região em forma de elipse?

Houve conjecturas como: *e se calculássemos a média aritmética de todos os raios da elipse?* Mas ao mesmo tempo outra conjectura: *para isto precisaríamos saber quantos raios tem uma elipse, se não sabemos não há como calcular a média.* Outro aluno disse em tom de brincadeira: *e se pudéssemos esticar daqui e empurrar dali até que a elipse fique circular?* Houve risadas, mas havia lógica no que foi dito.

Houve ainda a sugestão de que se fizesse um retângulo no interior da elipse e que se calculasse a área do retângulo desprezando o que ficasse na área externa a ele. Mas chegaram à conclusão de que também havia lógica na situação proposta, mas que a área externa seria muito grande e por consequência o erro no cálculo também seria muito grande. E esta foi uma conjectura usada para dar início à experimentação. Instigando-os a usar a mesma ideia, mas dividindo a elipse em várias partes.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), o levantamento de conjecturas pode surgir de diversas formas “por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas.” (p.33). As conjecturas estão relacionadas à reflexão que os alunos fazem sobre o que vão investigar e o professor precisa dar atenção a todo esse processo para estimular e assegurar que façam progressos na realização da investigação.

A sugestão foi que usando o software Geogebra, repartissem a elipse em partições iguais com a ferramenta *retas paralelas* ou com o recurso *retas perpendiculares*. Como na figura 02:

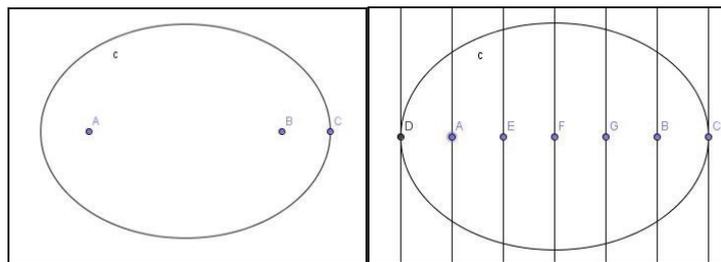


Figura 02. Construções usando o Geogebra

Após dividirem a elipse em várias partes instigou-os a tentarem identificar uma figura ou algumas figuras conhecidas que pudessem ser construídas no interior da elipse.

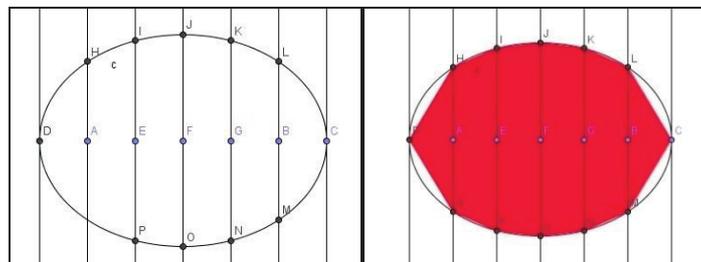


Figura 03. Construções usando o Geogebra



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
 “NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
 ISSN: 2238-8451

Logo identificaram dois triângulos que poderiam ser formados nas extremidades. No entanto não conseguiram ainda visualizar os trapézios. Então, recomendou-se a eles que ligassem as retas que tocavam nas extremidades da elipse como as que fizeram na figura 03 acima.

Por meio dessa construção foi lançada a pergunta: o que aconteceu com a figura depois de traçar retas paralelas e ligar os pontos das extremidades? Com que figura se parecem essas formadas por feixes de retas paralelas com os pontos ligados? Como calcular a área dessa elipse? Nessa situação por meio dessas perguntas, intensificou-se a experimentação, em que os alunos puderam pensar e edificar algumas novas conjecturas.

Os alunos foram anotando suas estratégias para calcular a área da elipse, depois de algum tempo obtiveram respostas como as relatadas na figura 04 a seguir:

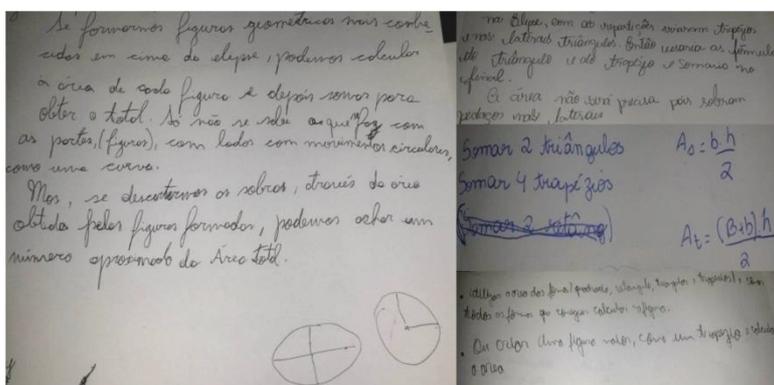


Figura 04. Análise de alunos

Pode-se observar pelas análises das anotações que os alunos retiraram a essência matemática da Regra dos Trapézios, e isso foi importante para a investigação e também pelo fato de que foi uma produção dos conhecimentos deles realizada apenas com o auxílio e mediação do professor.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
 ISSN: 2238-8451

O software Geogebra foi pedagogicamente suficiente para essa investigação, pois proporcionou ao aluno, vários meios de se pensar e raciocinar em uma possível forma de encontrar a área da figura pedida. Com isso ficou claro que, quando se percebeu construções que mostram formas de pensar matematicamente e caminhos de investigações diferentes. Conforme na figura 5, o aluno calculou a área aproximada da elipse dividindo-a em quadrados, triângulos e trapézios, efetuando a soma destas áreas. Já na figura 6, o aluno dividiu a elipse ao meio, calculou a área aproximada da sua metade pela soma da área dos trapézios retângulos formados e depois multiplicou o resultado por dois.

Na figura 05, ficou bem claro o envolvimento do aluno e a procura por estratégias para calcular a área proposta pelo professor. Isso significa que ele construiu o seu conhecimento pelo fundamento da Regra dos Trapézios. Esse aluno não enxergou apenas trapézios e triângulos, mas também quadrados, disso ele retirou que teria que calcular a área dos trapézios, triângulos e quadrados da figura formada por feixes de retas paralelas, e em seguida somá-las para obter uma área aproximada.

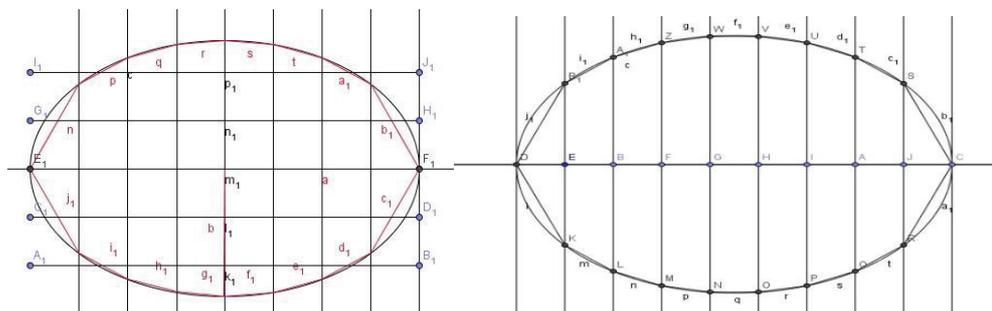


Figura 05. Construção no Geogebra feita por um aluno Figura 6 - Construção no Geogebra feita por um aluno

Outro ponto que vale ser ressaltado foi que fazendo a aproximação da figura da



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
 “NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
 ISSN: 2238-8451

elipse na tela usando a ferramenta zoom, perceberam que quanto mais partições, menor é a margem de erro, conforme mostra a figura 7. Isto aconteceu, sem a necessidade de que fossem induzidos a fazer, pois nem estava previsto no plano original. Com esta atividade os alunos conseguiram formalizar o cálculo da área aproximada da elipse como sendo a soma da área dos trapézios construídos no seu interior.

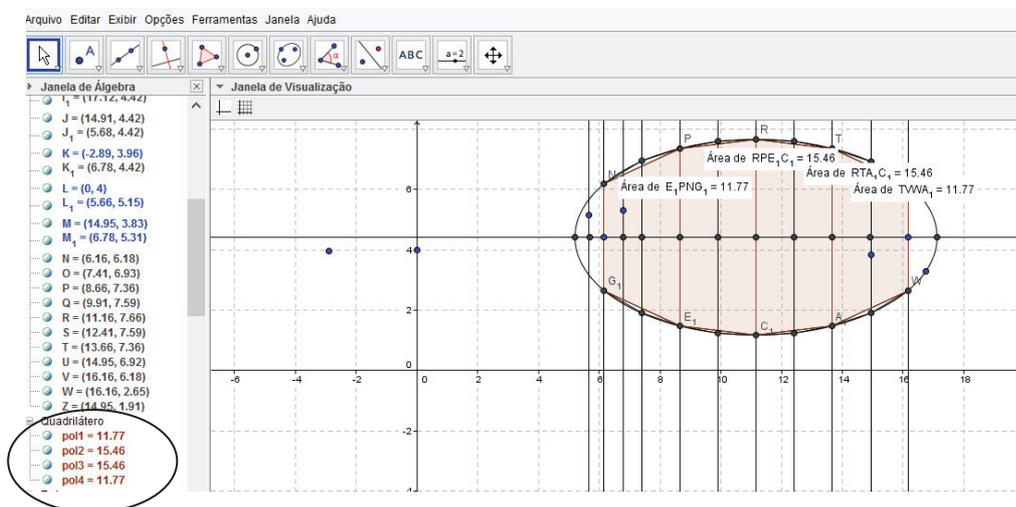


Figura 07. Cálculo da área aproximada pela regra dos trapézios.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) a justificação ou prova das conjecturas é o momento em que o professor deve procurar fazer com que os alunos compreendam que para se justificar uma conjectura um teste apenas não é insuficiente. São necessários vários testes que realizados podem afirmar ou negar as conjecturas levantadas. Sendo as conjecturas então, passíveis de serem comprovadas ou não, podendo ser confirmadas ou negadas a qualquer momento da investigação. Para concluir, foi mostrada para os alunos a fórmula do cálculo da área da elipse que para eles era desconhecida solicitando que comparassem as áreas calculadas antes para confirmarem que quanto maior o número de divisões da elipse menor a margem de erros.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
 ISSN: 2238-8451

Como os alunos não conseguiram generalizar matematicamente a Regra dos trapézios, fizemos a demonstração dessa regra em conjunto. Conforme diz Braumann:

há quem diga que Matemática é demonstração. Não fujamos das demonstrações. Elas são essenciais para se perceber a essência da Matemática e não podem ser substituídas por exemplos ou ilustrações (fazê-lo induz os estudantes a pensar que tal é um método de demonstração logicamente aceitável). Quando a demonstração seja complicada e não se queira fazer, haja a honestidade de o dizer. (2002, p.5).

Considerando a participação dos alunos, o resultado da experimentação realizada até aqui e que a demonstração da regra dos trapézios é razoavelmente simples, optamos por fazê-la juntamente com os alunos que neste momento apresentaram dificuldades em abstrair a regra, contudo conseguiram acompanhar a demonstração apresentando sugestões e opiniões nas quais se identificou que compreendiam a demonstração matemática apesar de não conseguirem fazer sozinhos.

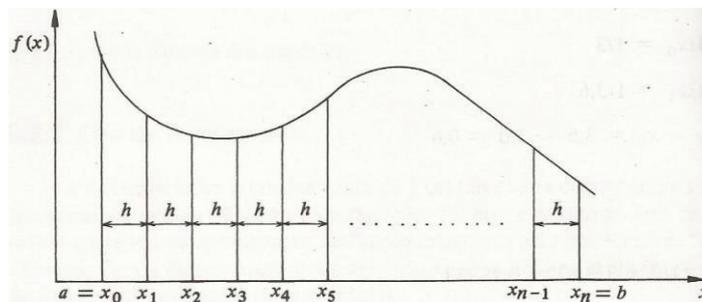


Figura 09. divisões da área em trapézios.

$h = x_{i+1} - x_i$, sendo $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{h}{2} \cdot [f_{x_0} + f_{x_1}] + \frac{h}{2} \cdot [f_{x_1} + f_{x_2}] + \frac{h}{2} \cdot [f_{x_2} + f_{x_3}] + \frac{h}{2} \cdot [f_{x_3} + f_{x_4}] + \frac{h}{2} \cdot [f_{x_4} + f_{x_5}] \\
 & + \dots + \frac{h}{2} \cdot [f_{x_0} + f_{x_n}]
 \end{aligned}$$



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

$$A = \frac{h}{2} \cdot [f_{x_0} + f_{x_n} + 2 \cdot (f_{x_1} + f_{x_2} + \dots + f_{x_{n-1}})]$$

Após a construção da demonstração, a maioria dos alunos conseguiu representar matematicamente a regra dos trapézios como sendo $I = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot h$, onde $x_1 + x_2$ representam a distância entre os pontos definidos e h seria a amplitude entre eles, que também pode ser chamada de altura dos trapézios formados ou triângulos.

Fez-se a discussão em relação a todo o processo de investigação realizado até o momento para que os alunos pudessem refletir sobre as fases vivenciadas e sobre os resultados. A discussão foi um momento significativo da aula em que socializando suas descobertas, confrontando os resultados, sistematizando as ideias, os alunos puderam chegar à formalização e à generalização dos conceitos matemáticos e à reflexão dos resultados da investigação.

Uma situação que confirma que compreenderam a regra demonstrada foi a pergunta dos alunos, que dizia se: *a regra chama Regra dos Trapézios e na demonstração da regra foi utilizados apenas trapézios então porque a maioria dos desenhos das elipses que eles construíram tinham um triângulo nos focos da elipse?* Logo se percebe que estavam interagindo com o assunto, assumindo a postura de investigador matemático, provando assim um dos aspectos que a investigação matemática propõe. Dessa pergunta, foi possível descobrir uma aprendizagem nova para eles, que foi a igualdade da área do trapézio com a área do triângulo quando considerado que o triângulo seria um trapézio de base menor igual a zero.

Nessa sequência de atividades desenvolvidas é importante destacar que nesse caso, a proposta de investigação partiu do professor, conforme havia sido planejado. Porém essa proposta poderia ser "levantada" pelos alunos e também pode acontecer que os alunos levantem conjecturas sem a decisão do professor que nesses casos deve conduzir a investigação mesmo não tendo sido planejada, pois isso irá acrescentar



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

consideravelmente a aprendizagem do aluno.

Contudo, pode-se concluir que os alunos estiveram atentos em todas as fases, e conseguiram exprimir a essência da Regra dos Trapézios. Conseguiram acompanhar a demonstração da fórmula geral e conjecturaram que pode haver aplicações importantes para a vida dessa regra matemática.

Etapa 3: Aplicações da Regra dos Trapézios

Ao fim da formalização dessa investigação matemática, conversamos sobre o termo Integração Numérica e discutimos sobre as importantes aplicações da regra dos trapézios no dia-a-dia deles. Para isto, propusemos problemas que pudessem ser relacionados à situações cotidianas em que eles puderam verificar uma aplicação matemática real. Fizeram outras aplicações, inclusive calculando volume usando a regra.



Figura 11. Resolução de problemas de aplicações da Regra dos Trapézios

Saber usar a fórmula para o cálculo da área usando a regra dos trapézios indica que os alunos compreenderam o conteúdo e sabendo resolver situações como essa demonstra que sabem também relacionar o conteúdo com situações de aplicação e que poderão usá-lo para resolver problemas do dia-a-dia. A conclusão da atividade se deu com a discussão dos resultados entre os alunos e a socialização da resolução dos exercícios.



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID

*“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”*

ISSN: 2238-8451

A avaliação em todas as atividades aconteceu de forma contínua sendo considerado todo o processo. Foram observadas as fases das conjecturas, das experimentações, formalização e generalização descritas acima. Também se observou a capacidade de concentração e interação com o grupo, precisão na apresentação dos grupos, atenção nas atividades propostas, estratégias utilizadas na resolução dos problemas e atividades. A atenção e experimentação no manuseio do software, adesão da proposta investigativa, estratégias utilizadas para construção da proposta e para chegar à formalização e generalização, capacidade de aplicação em situações cotidianas. E por fim, na resolução dos exercícios utilizando a Regra dos Trapézios, estratégias e interpretação dos exercícios aplicados ao dia-a-dia.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a realização dos estudos percebeu-se que as metodologias de ensino e os recursos didáticos que têm produzido melhores resultados são aqueles que apresentam possibilidades para que o conhecimento seja construído a partir do seu uso. Nesse caso, o preparo do professor é essencial, visto que, é a atitude de planejar, buscando a melhor forma de mediar o conteúdo e a condução da aula que define como se dá a participação do aluno na construção da sua aprendizagem. O recurso didático usado é apenas uma ferramenta que pode contribuir de forma significativa ou não, na aprendizagem dos alunos dependendo da forma que é conduzida a aula. Nesta perspectiva, os softwares educacionais têm se apresentado como promissores objetos pedagógicos que possibilitam a interação entre o aluno e o objeto em estudo de forma que o conhecimento seja construído nesta interação por meio da experimentação e da formalização de ideias e conceitos.

Na pesquisa realizada, o Geogebra foi usado como ferramenta de ensino para colocar em prática uma proposta pedagógica que contribuiu para a aprendizagem da Regra dos Trapézios e da integral numérica permitindo que o aluno, com a mediação do



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID

*“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”*

ISSN: 2238-8451

professor, pudesse pesquisar, testar hipóteses, experimentar novas formas de aprender, além de facilitar para manter a sua atenção e a sua participação de forma colaborativa.

Nesta experiência percebeu-se que o software Geogebra se apresenta como uma ferramenta dinâmica que permite as construções matemáticas e a transformação destas construções em tempo real pela modificação dos dados usados inicialmente possibilitando visualizações diferentes de um mesmo objeto ou a transformação deste em outra construção pela inserção de novos dados. É um recurso didático que pode ser usado em aulas investigativas de variados conteúdos de matemática como geometria, gráficos estatísticos, gráficos de funções algébricas, matrizes, trigonometria, dentre outros. Os recursos variados que possibilitam largas possibilidades de que o aluno vivencie as fases de levantamento de conjecturas, experimentação e formalização de conceitos matemáticos.

Propõe-se a Investigação Matemática como metodologia inteligente de fazer com que o aluno participe da aula voluntariamente, pois esse método dispõe de liberdade aos alunos para experimentar, levantar conjecturas ou hipóteses, e por fim formalizar e generalizar. E nesse sentido o software Geogebra contribui de forma significativa para a realização desses passos da investigação tornando-se um aliado do professor e dos alunos dando suporte para que possam fazer testes e levantar hipóteses e pela análise das construções refutarem as conjecturas iniciais ou confirmá-las chegando à formalização e generalização dos conceitos.

O Estágio Supervisionado representou a oportunidade oferecida para que se pudesse refletir sobre a profissão de professor por meio da pesquisa e da prática na escola campo. Esta fase de formação docente foi de grande importância para a formação inicial estabelecendo um fluxo de ideias novas, de concepções formadas conscientemente no exercício da profissão para que possa contribuir com a melhoria da educação e em especial para o ensino de matemática. A partir da prática como regentes em sala de aula e por meio do desenvolvimento dos projetos de pesquisa foi possível refletir sobre metodologias de ensino, sobre o uso adequado dos objetos pedagógicos,



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
CÂMPUS IPORÁ
IV CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DE ESTÁGIO E II ENCONTRO DO
PIBID
“NOVOS PARADIGMAS DE ENSINO: ADAPTAÇÕES CURRICULARES E O DIREITO AO
SABER”
ISSN: 2238-8451

sobre as características do aluno no contexto atual e sobre o papel do professor em sala de aula como formador de ideias e cor responsável pelas mudanças necessárias na sociedade.

REFERÊNCIAS

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática.** In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_02_CABraumann.pdf. Acesso: 25 de jun. de 2014.

CRUZ, D. G. da; **A utilização de Ambiente Dinâmico e Interativo na construção do conhecimento produzido.** 169 p. Tese (Mestrado em Educação Matemática) Setor de Ciência Humanas e Sociais, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005. Disponível em: <http://dspace.c3sl.ufpr.br/dspace/bitstream/handle/1884/7414/DONIZETE%20GON%20C3%87ALVES%20DA%20CRUZ.pdf?sequence=1>. Acesso: 25 set. 2014.

LORENZATO, Sergio. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2010.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

PONTE, João Pedro da, BROCARD, Joana, OLIVEIRA, Hélia. **Investigações na Sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. **Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando:** Articulando investigação matemática com o Geogebra. Goiânia: 2012. p, 39-51. Disponível em: <http://seer.ucg.br/index.php/educativa/article/view/2491/1549>. Acesso em: 15 mar. 2014.