

As contribuições de Euler para aritmética e suas aplicações

EscalathyLoranna Ramos da Silva

*escalathy@hotmail.com (IC)**

Universidade Estadual De Goiás

Campus Jussara

Matemática

Jussara- Goiás

Ricardo Elias Jreige

ricardojreige@yahoo.com.br (PQ)

Universidade Estadual De Goiás

Campus Jussara

Matemática

Jussara- Goiás

Resumo:

O objetivo deste é relatar as contribuições de Leonhard Euler (1707-1783) para a matemática. A metodologia usada é a bibliográfica com natureza exploratória. O texto ressalta um pouco da vida e alguns resultados de Euler, considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Suas obras completas consistem em 84 volumes, sendo que cerca de 40% delas são relacionadas à matemática. Para falar de Euler temos que mencionar Fermat devido ao fato de Euler ter demonstrado todos os teoremas deste matemático, exceto o teorema intitulado de *Último Teorema de Fermat*, que somente foi demonstrado em 1995, pelo matemático inglês Andrew Wiles. Euler fez uma revelação de que a fórmula desenvolvida por Fermat para encontrar números primos era falha, porém não a desmerecendo. Fermat verificou o modelo, substituindo a variável por números naturais 0, 1, 2, 3 e 4, daí concluiu que sua fórmula gerava números primos. Porém, Euler mostrou que para o valor 5 o modelo matemático não gerava um resultado primo, deduzindo uma fatoração com mais de um fator primo para o valor encontrado.

Palavras-chave: Euler. Contribuições. Matemática. Fermat. Números primos.

Introdução

Leonhard Paul Euler foi um matemático suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez grandes descobertas para várias áreas da matemática como, por exemplo, no cálculo e na teoria dos números. Nasceu na Basileia em 15 de abril de 1707, falecendo em 18 de setembro de 1783, com 76 anos de idade, em São Petersburgo (Rússia).

Euler ficou conhecido por desenvolver várias formulas como, por exemplo, a fórmula de Euler, os números de Euler, a constante de Euler-Mascheroni, os ângulos de Euler, a conjectura de Euler, entre outras. Ele trabalhou em quase todas as áreas da matemática sendo elas: geometria, cálculo infinitesimal, álgebra e teoria dos números.

Segundo D'Ambrosio (2009), Euler foi considerado o matemático mais prolífico da história. Suas obras completas estão reunidas em 84 volumes, sendo que 40% dessas obras são sobre a matemática.

Euler chegou a demonstrar quase todos os teoremas de Fermat exceto o teorema conhecido como “Último Teorema de Fermat”. Um dos sonhos de todo matemático é encontrar uma fórmula que gere números primos, Fermat morreu com a certeza de que sua fórmula da primalidade $2^{2^n} + 1$ sempre gerava números primos. Porém, Euler derrubou sua convicção quando demonstrou e provou que ela não era válida para todos os números.

Euler fez grandes descobertas na matemática e até hoje elas veem sendo discutidas e analisadas. Seu amplo conhecimento ficou registrado na história, sendo amplamente utilizada no presente e, com certeza, será aplicada também no futuro.

Material e Métodos

A pesquisa foi realizada através de leituras de livros e artigos, para que se possa obter um amplo conhecimento sobre a história da vida, obras e feitos de Leonhard Paul Euler em relação à matemática. Sendo assim, a metodologia utilizada foi a bibliográfica de natureza investigatória, partindo da ideia proposta inicialmente, ela se mostrou eficiente e apropriada.

D'AMBRÓSIO (2009) apresenta uma excelente abordagem da vida de Leonhard Euler e faz uma exposição de suas contribuições para matemática. Enquanto HEFEZ (2011) aborda de forma mais aprofundada as contribuições de Euler para Teoria dos Números (Aritmética).

Esta pesquisa tem como intuito aumentar o conhecimento em relação as contribuições de Euler para a matemática proporcionando um melhor conhecimento em relação a certos conteúdos que envolvem os feitos de Euler.

A pesquisa foi dividida em duas etapas. Na primeira etapa foi feita a escolha dos livros e artigos que seriam usados na pesquisa. Nesta etapa, também foi realizada a leitura dos materiais selecionados para que sem tenha um pouco de conhecimento sobre o assunto a ser tratado. Já na segunda etapa foi feita a análise e a produção do texto referente aos materiais lidos e as demonstrações de alguns feitos de Euler.

Leonhard Paul Euler era filho de Paul Euler, um pastor calvinista, e de Margaret Brucker, filha de um pastor, nasceu em 15 de abril de 1707 na Basileia – Suíça, sendo este o país de nascimento de muitos matemáticos importante do século XVII. Euler teve duas irmãs mais novas, no entanto, era uma criança que demonstrava muita inteligência sobre muitas coisas. Para distraí-lo de suas brincadeiras, onde muitas delas eram perigosas, seu pai lhe deu um livro de álgebra, muito popular na época, que continha questões desafiadoras, as quais ele respondia com a maior facilidade.

Seu primeiro contato com a matemática foi através de seu pai, que lhe ensinou o básico, como ler, escrever e as noções básicas sobre matemática. Seu pai Paul Euler era amigo de Johann Bernoulli que era considerado o matemático mais importante da Europa e que teve uma grande influência na vida de Euler.

Aos treze anos ele ingressou na Universidade da Basileia. Essa era uma idade normal para os jovens com capacidade mental avançada ingressarem na universidade. Aos dezesseis anos já havia recebido o grau de mestre. É considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Suas obras completas estão contidas em oitenta e quatro volumes, boa parte sobre matemática. Segundo D'Ambrosio (2009), “de toda a produção de Euler, cerca de 40% são sobre matemática e estão em 30 volumes de série. O resto da produção trata de mecânica, ótica, magnetismo, acústica, filosofia, além de outros assuntos”. Além da matemática, Euler tinha um amplo conhecimento sobre teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais.

Em 1738, ficou cego do olho direito devido a uma febre que havia tido três anos antes. Isso não prejudicou seus trabalhos, muito pelo contrário, o fez querer trabalhar ainda mais. Em 1771, ficou totalmente cego devido a uma catarata no olho esquerdo. Apesar de totalmente cego, Euler não parou de produzir, só que agora ele ditava para alguém escrever para ele.

Após terminar um de seus cursos foi convidado a assumir a cadeira de um professor falecido da universidade de São Petersburgo. Em 1930, Euler tornou-se professor de física na academia, o que permitiu que ele abandonasse seu posto da marinha russa, cargo esse que ele ocupava desde 1927.

Em 18 de setembro de 1783 depois do almoço com sua família, Euler estava discutindo sobre a descoberta de um novo planeta da época, chamado Urano, e sua órbita com Anders Johan Lexell, quando veio a falecer devido a uma hemorragia cerebral. Foi enterrado próximo de Katharina, filha de um pintor suíço, sua primeira esposa, no cemitério luterano de Smolensk na ilha de Vassiliev. Com ela teve treze filhos, mas apenas cinco sobreviveram.

Segundo D'Ambrosio (2009), Euler fez contribuições importantes a navegação. Sendo ainda um dos autores mais citados na importante obra de Ferreira (2007). Quando nos referimos a Euler estamos falando do escritor de matemática mais produtivo.

Contribuições para a matemática

Euler trabalhou em quase todas as áreas da matemática, como por exemplo, a geometria, cálculo infinitesimal, trigonometria, álgebra e teoria dos números. Ele é o único matemático com dois números em sua homenagem, o número e que vale aproximadamente 2,71828 e a constante de Euler-Mascheroni γ (gama) mais conhecida como constante de Euler que equivale a aproximadamente 0,57721.

Segundo Boyer (2012), “a teoria dos números tem atraídos fortemente muitos dos maiores matemáticos, tais como Fermat e Euler, mas não se interessou por outros, inclusive Newton e D’Alembert”. Muitos dos trabalhos de Euler relacionados à teoria dos números são baseados nas obras de Pierre de Fermat que foi um matemático e cientista Francês que nasceu em 17 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomagne e faleceu em 12 de janeiro de 1665 em castres com 63 anos de idade.

Euler demonstrou todos os teoremas de Fermat exceto seu teorema denominado “Último Teorema de Fermat”. Ele ainda derrubou uma das teses de Pierre que afirmava que números da forma $2^{2^n} + 1$ são primos. Em 1732 Euler com sua capacidade extraordinária em teoria dos números e cálculo provou que o teorema de Fermat é falho para $n = 5$ que tem como resultado 4 294 967 297 e que é divisível por 641 obtendo como resultado o valor 6 700 417. Vamos mostrar por congruência que para $n = 5$ o resultado não é primo e, para isso, precisaremos usar

o seguinte corolário. Segundo Hefer (2011), Sejam $a, b, m \in \mathbb{N}^*$, com $m > 1$. Se $a + b \equiv 0 \pmod{m}$, então,

$$a^{2n} \equiv b^{2n} \pmod{m} \text{ e } a^{2n+1} + b^{2n+1} \equiv 0 \pmod{m}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que 4 294 967 297 é fatorável por 641. Logo, temos:

$$641 = 5 \cdot 2^7 + 1 \quad (\text{I}) \quad \text{e} \quad 641 = 5^4 + 2^4. \quad (\text{II})$$

De (II) temos que:

$$5^4 + 2^4 \equiv 0 \pmod{641}. \quad (\text{III})$$

E de (I) temos que:

$$5 \cdot 2^7 \equiv 1 \pmod{641}.$$

Elevando ambos os membros a quarta potência temos:

$$5^4 \cdot 5^{28} \equiv 1 \pmod{641}. \quad (\text{IV})$$

Seja $2^{28} \equiv n \pmod{641}$, com $n \in \mathbb{N}$. (V)

Multiplicando (III) por (V) temos:

$$2^{28}(5^4 + 2^4) \equiv 0 \pmod{641}$$

$$5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32} \equiv 0 \pmod{641}.$$

Utilizando (IV) obtemos:

$$5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32} \equiv 1 + 2^{32} \equiv 0 \pmod{641}.$$

Podemos afirmar que

$$2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}. \quad (\text{VI})$$

Podemos escrever $2^{32} = 2^{2^5}$. (VII)

Substituindo (VII) em (VI) teremos como resultado:

$$2^{2^5} + 1 \equiv 0 \pmod{641}.$$

Portanto, 641 divide 4 294 967 297.

Daí chegamos à conclusão de que para $n = 5$ a fórmula de Fermat não gera números primos, pois para um número ser primo é necessário que tenha apenas dois divisores naturais um e ele mesmo.

Acredita-se que a partir de $n = 6$ não gera mais números primos. Pelo fato de Fermat ter demonstrado para $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$ e ter resultado em números primos, ele acreditava que sua fórmula não tinha erro.

Euler também demonstrou o pequeno teorema de Fermat, que afirmava que se p é primo e a um inteiro, então $a^p - a$ é divisível por p .

Demonstração (efetuada por Euler em 1730):

Para $p = 2$ temos:

$$a^2 \equiv a \pmod{2} \Leftrightarrow 2|a^2 - a.$$

Mas, $a^2 - a = a(a - 1)$, como a e $a - 1$ são inteiros consecutivos, um deles é par, logo o produto é divisível por 2. Portanto, válido para $p = 2$.

Para $p > 2$, se $a = 0$ ou $a = 1$ a afirmação é verdadeira.

Mostraremos para todo a natural. Por hipótese de indução sobre a , suponhamos que $a^p \equiv a \pmod{p}$, então:

$$(a + 1)^p \equiv [a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1}a + 1] \pmod{p}$$

Pelo Lema: Seja p um número primo, os números $\binom{p}{i}$, com $0 < i < p$ são todos divisíveis por p . Teremos:

$$(a + 1)^p \equiv (a^p + 1) \pmod{p} \stackrel{HI}{\equiv} (a + 1) \pmod{p}$$

Logo, $a^p \equiv a \pmod{p}$, para todo a natural.

Como $p - 1$ é par, para todo $p > 2$, então $a^{p-1} = (-a)^{p-1}$. Portanto, a afirmação é válida para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Veja o exemplo: $2^{50} + 3^{50}$ é divisível por 13.

Resolução:

$$2^{50} = 2^{3 \cdot 13 + 11} = (2^{13})^3 \cdot 2^{11}.$$

Logo,

$$2^{50} \equiv 2^3 \cdot 2^{11} \equiv 2^{13} \cdot 2 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{13}$$

Segue que

$$3^{50} = 3^{3 \cdot 13 + 11} = (3^{13})^3 \cdot 3^{11}$$

Logo,

$$3^{50} \equiv 3^3 \cdot 3^{11} \equiv 3^{13} \cdot 3 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{13}$$

Dos resultados acima segue que

$$2^{50} + 3^{50} \equiv 4 + 9 \equiv 13 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Segundo Boyer (2012), além da teoria dos números, Euler foi o responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais e de muitos problemas específicos que aparecem em livros que remontam os grandes feitos de Euler sobre o cálculo.

Outro interesse de Euler foi sobre probabilidade. Tanto ele quanto seu amigo D'Alembert faziam questionamento sobre a expectativa de vida e sobre loterias. Suas contribuições mais conhecidas na matemática moderna são: introdução da

função gama, a relação entre o cálculo diferencial de Leibniz e o método das fluxões de Newton e a resolução de equações diferenciais utilizando o método da integração.

Euler foi o primeiro a definir o seno e o cosseno como funções. Além de introduzir e fazer com que se tornassem populares várias fórmulas de notação matemática através de seus inúmeros livros didáticos. Ele foi o primeiro a escrever $f(x)$ para denominar a função f aplicada em x . Introduziu também a letra grega Σ (sigma maiúsculo) para somatórios. E também tornou a letra grega π (pi) popular embora não tenha sido ele quem a criou.

Considerações Finais

Leonhard Paul Euler foi um matemático brilhante que trouxe muitas mudanças para a matemática. Após muitos anos de sua morte, ele ainda continua sendo homenageado em várias partes do mundo. E suas obras ficaram ainda mais conhecidas. Além de um brilhante matemático, Euler também ficou conhecido por seus trabalhos na mecânica, na dinâmica de fluidos, na óptica, na astronomia e na teoria da música. Obteve grandes cargos em universidades de renome da época. Casou-se duas vezes, sendo seu segundo casamento, com sua cunhada, contrariando a opinião de seus filhos.

Euler foi uma pessoa determinada a conseguir alcançar seus objetivos, e deve ser seguido como exemplo por todo mundo. Mesmo cego não deixou de trabalhar e de tentar levar aos seus leitores um pouco do que ele sabia. Apesar de sua morte, suas obras ainda continuaram a ser publicadas pela academia de ciências de São Petersburgo. Suas obras novas foram publicadas até cinquenta anos depois de sua morte.

Desta maneira podemos concluir que a elaboração desta pesquisa proporcionou um amplo conhecimento sobre assuntos na qual muitas vezes é considerado extremamente difícil. Além de conhecer um pouco da vida e da mente extraordinária de Leonhard Paul Euler um matemático brilhante que trouxe melhorias surpreendentes para a matemática.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu esposo, que me ajudou bastante, dando-me apoio, à Universidade Estadual de Goiás – CâmpusJussara, que forneceu alguns materiais, e ao mestre Ricardo Elias Jreige que me auxiliou nos estudos e me forneceu os materiais que não se disponibilizava na universidade.

Referências

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C..**História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Euler, um Matemático Multifacetado.**Revista Brasileira de História da Matemática**. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática, vol. 9, nº 17, p. 13-31, abril/setembro, 2009.

FERREIRO, Larrie D. 2007. **Ships and science. The birth of naval architecture in the scientific revolution**, 1600-1800. Cambridge, Massachusetts: The MIT press.

HEFEZ, Abramo. Elementos da Aritmética. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. (Coleção do Professor de Matemática)