

Modelo de Jaynes-Cummings: Um estudo teórico para o modelo de um fóton.

Caio Rodrigues Martins ^{1, *} (IC), Ruberval Ferreira de Moraes Neto ¹ (IC), Agnaldo Rosa de Almeida ¹ (PQ).

¹ Câmpus Henrique Santillo, Universidade Estadual de Goiás, 75.132-903, Anápolis, GO, Brasil.

* caiorodriguesmartins@hotmail.com

Resumo: O artigo realiza um estudo teórico sobre o modelo de Jaynes-Cummings, evidenciando o modelo para um fóton no átomo de dois níveis, em que o modelo descreve o acoplamento de um átomo de dois níveis com o modo de um campo eletromagnético em uma cavidade óptica. Para a compreensão do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings é preciso conhecer alguns passos importantes, mesmo porque esse hamiltoniano configura-se pela soma dos hamiltonianos quânticos: do átomo livre, do campo eletromagnético e da interação entre o átomo e o campo, ambos quantizados. Para um melhor entendimento são necessários alguns estudos, tais como: A quantização do oscilador harmônico simples, quantização do campo eletromagnético e a quantização para o átomo de dois níveis. Para a quantização do oscilador harmônico é importante conhecer a primeira e segunda quantizações. Para o hamiltoniano quântico referente a interação átomo-campo, são utilizadas a aproximação de dipolo, método de interação e a aproximação de ondas girantes (RWA - Rotating Wave Approximation).

Palavras-chave: Hamiltoniano. Quantização. Átomo.

Introdução

No final do século XIX os estudos referentes aos diversos campos da física sofreram mudanças muito inesperadas. Este fato é devido, principalmente, a uma noção difundida na época de que os grandes princípios e leis físicas já estavam consolidados, de forma clara e elegante. Isso fez com que diversos cientistas acreditassem que as leis que descreviam os eventos da natureza estavam prontas para serem lapidadas e consolidadas.

Podemos exemplificar cada grande área da física, suas belezas matemáticas e conceituais, que já existiam na época, como: A mecânica de Newton, que descrevia com grande sucesso o movimento dos corpos materiais; a teoria eletromagnética de Maxwell, que apontava com perfeição a união dos fenômenos elétricos, magnéticos e a óptica; a termodinâmica e a mecânica estatística, que com

os trabalhos de Carnot, Gibbs, Joule, Maxwell e Boltzmann contavam, também, com uma exímia formulação, compreendendo-se, assim, a física que nomeamos como: Teoria Clássica da Física. [1].

Contudo, no início do século XX, apareceram novos eventos que não eram harmonizáveis com as explicações da teoria clássica da física. Eventos tais como: Radiação do corpo negro (Kirchhoff em 1859), efeito fotoelétrico (Hertz em 1887), raios X (Rontgen em 1895), radioatividade (Becquerel em 1896), comportamento do elétron (Thomson em 1896), dentre outros. [1].

Consequentemente a partir dos estudos que existiam na época surgiram novos caminhos para a criação de uma nova física, que hoje a intitulamos como: física moderna. Surgiram os estudos de diversos físicos, inspirados pela abordagem de Max Planck, para explicar o problema da equipartição da energia para tratar a luz emitida por um corpo negro, que culminaram em embaraçosas contradições entre a física clássica e as explicações para os fenômenos físicos que ocorressem no nível atômico e subatômico. [1].

Neste contexto, podemos definir a mecânica quântica como sendo um tratamento teórico (que se aproxima perfeitamente aos resultados experimentais) na qual se pode: descrever, relacionar e prever vasto campo de sistemas físicos, desde partículas através do núcleo, átomos e radiação até moléculas e matéria condensada. [2].

Apesar do sucesso atingido pela Mecânica Quântica em explicar o comportamento dos eventos na escala microscópica, ainda hoje existem diversas interpretações e variadas dúvidas referentes à sua forma de mostrar o comportamento físico para os sistemas que estão sendo analisados. Como afirma David J. Griffiths: “Não acredito que alguém possa discutir com inteligência o que significa mecânica quântica até que tenha uma noção sólida do que a mecânica quântica faz.”. Com isso podemos observar que essa nova teoria introduzida possui muitos postulados e princípios fundamentais que não possuem o consenso geral [3], mas que explicam de uma excelente forma os fenômenos físicos que são analisados.

Dentro da mecânica quântica existem diversificadas áreas de estudo. Uma área bastante interessante e de grande enfoque atual, é a óptica quântica. A óptica quântica é a ramificação da mecânica quântica que trabalha com a interação entre a luz e a matéria, ambos quantizados. Para podermos ver a importância dos estudos

referentes à essa área de atuação na atualidade, podemos observar que alguns cientistas foram laureados com o Prêmio Nobel de Física, devido as suas carreiras possuírem gigantescas contribuições para a óptica quântica, mostrando que, sem dúvida, é bastante atual e de relevância para a compreensão dos eventos da escala microscópica.

Laureados ao prêmio Nobel de Física, em 2012, Serge Haroche e David J. Wineland, devido às suas contribuições por meio de métodos experimentais que permitem medições e manipulações de sistemas quânticos individuais. [4] e [5]. Antes de Haroche e Wineland, Roy J. Glauber, em 2005, devido às suas contribuições para a teoria quântica da coerência óptica, [6], e antes dele Norman F. Ramsey, em 1989, pela invenção do método de campos oscilatórios separados, e seu uso no maser de hidrogênio e em outros relógios atômicos. [7].

Adentrando para a óptica quântica existem diversificadas áreas de estudos e, principalmente, diversas possibilidade de inovação. Contudo, para que essa inovação possa acontecer, deve-se desenvolver aquilo que já está estabelecido, que envolve inúmeros casos de estudos. Esse é o caso do modelo de Jaynes-Cummings, proposto pelos físicos Edwin Thompson Jaynes e Frederick W. Cummings.

Esse modelo mostra-se de grande utilidade em experimentos que envolvem computação e teletransporte quântico. O átomo real possui diversos níveis e subníveis em sua estrutura, o motivo de estudarmos o átomo de dois níveis é com o intuito de uma simplificação matemática, porque como sabemos, os átomos emitem e absorvem radiação, e a interação dessa radiação com o átomo representa algum dos problemas fundamentais na óptica quântica. A essência do modelo de Jaynes-Cummings é a aproximação para um átomo de dois níveis, pois ela permite que o analisemos de uma forma analítica. [8].

Uma cavidade óptica caracteriza-se por ser um dispositivo em que alguns raios de luz tendem a permanecer confinados por espelhos que o refletem. E no presente trabalho iremos considerar a existência de um campo eletromagnético confinado dentro de uma cavidade e em um regime de acoplamento forte, em que existiria a interação com o átomo de dois níveis.

O modelo descreve o acoplamento de um átomo de dois níveis com o modo de um campo eletromagnético em uma cavidade óptica. Sendo que o campo eletromagnético deve ser quantizado, possuir uma direção de propagação, certa

polarização e formado por uma determinada frequência. O desenvolvimento desse trabalho caracteriza-se por um estudo teórico do modelo de Jaynes-Cummings para a emissão de um fóton, compreendendo-se então por uma reprodução de parte dos trabalhos desenvolvidos em 1963 por Jaynes e por Cummings. O trabalho em questão é intitulado por: Comparação das Teorias de Radiação Clássica e Semiclássica com Aplicação ao Beam Maser. [9]. Com o objetivo de desenvolver o Hamiltoniano (observável correspondente à energia total do sistema) que trata da interação entre um único átomo de dois níveis e um único modo do campo de radiação quantizado.

Material e Métodos

Para o desenvolvimento do presente artigo será realizado um estudo teórico referente ao modelo de Jaynes-Cummings, baseado em artigos científicos, livros de mecânica quântica, eletromagnetismo e óptica quântica. Buscando o hamiltoniano de Jaynes-Cummings, evidenciando o modelo de um fóton. Para conseguirmos chegar a essa compreensão, devem ser estudados os seguintes assuntos: realização da primeira e a segunda quantização para o oscilador harmônico simples, quantização do campo eletromagnético e quantização do átomo. Entendimento do Hamiltoniano de interação átomo-campo.

Com o conhecimento desses assuntos podemos buscar a compreensão das aproximações que envolvem o hamiltoniano de Jaynes-Cummings para o modelo de um fóton.

Resultados e Discussão

A interação entre um átomo de dois níveis com um único modo do campo eletromagnético quantizado dentro de uma cavidade, com uma frequência ω próxima a frequência de transição ω_{eg} entre os níveis $|g\rangle$ e $|e\rangle$, que representam os estados do nível fundamental e excitado do átomo, respectivamente.

O átomo irá interagir somente com um único modo da cavidade, já que os outros modos não acoplam-se ao átomo em consequência do distanciamento com a frequência de transição. O hamiltoniano total desse sistema pode ser escrito como:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_{CE} + \hat{H}_I, \quad (1)$$

em que $\hat{H}_A$ é o hamiltoniano do átomo livre, $\hat{H}_{CE}$ é o hamiltoniano do campo eletromagnético e $\hat{H}_I$ é o hamiltoniano de interação entre o átomo de dois níveis e o campo eletromagnético. Esses hamiltonianos são de origem quântica.

Quando realizamos a quantização do átomo de dois níveis, encontramos:

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2} \hbar \omega_{eg} \sigma_z, \quad (2)$$

que é o hamiltoniano quântico para o átomo livre em termos dos operadores de Pauli.

Quando partimos das Equações de Maxwell e quantizamos o campo eletromagnético desprezando a energia de vácuo, encontramos:

$$\hat{H}_{CE} = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (3)$$

que é o hamiltoniano quântico para um modo do campo eletromagnético.

Quando partimos da interação de um elétron com o campo eletromagnético, descrevendo seu hamiltoniano de acoplamento mínimo, realizando algumas transformações, calibre de Coulomb, aproximação de dipolo elétrico, podemos definir que:

$$\hat{H}_I = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad (4)$$

em que $\vec{d} = e\vec{r}$ representa o momento de dipolo elétrico. Podemos escrever o hamiltoniano de interação em termos dos operadores de transição do átomo, como:

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{i,j} g^{ij} \sigma_{ij} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (5)$$

em que:

$$g^{ij} = -\frac{d_{ij}}{\hbar} \hat{e} \in, \quad (6)$$

é definida constante de acoplamento do átomo com o campo. O sistema em questão é um átomo de dois níveis que possui dois autoestados de energia, o que nos remete a seguinte questão: Quando aplicarmos um campo elétrico no sistema, o elétron irá para o outro estado do átomo, ou seja, se o átomo estiver no estado fundamental, ele irá para o estado excitado e vice-versa. Fazendo com que a força que o campo induz na transição do estado $|g\rangle$ para o estado $|e\rangle$ é a mesma força que o campo induz na transição do estado $|e\rangle$ para o estado $|g\rangle$. Com isso podemos escrever o hamiltoniano de interação como:

$$\hat{H}_I = \hbar g (\sigma_{ge} + \sigma_{eg}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (7)$$

Em termos dos operadores escada, temos:

$$\hat{H}_I = \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (8)$$

Substituindo as equações (2), (3) e (8) na equação (1), obtemos:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{eg} \sigma_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (9)$$

A equação (9) é conhecida como hamiltoniano de Rabi. No modelo de Jaynes-Cummings iremos utilizar duas técnicas sobre o hamiltoniano de Rabi, que são: A representação de interação e a aproximação de ondas girantes (RWA, sigla que vêm do inglês “Rotating Wave Approximation”). Utilizando o hamiltoniano de interação do átomo com o campo na forma de interação, temos:

$$\tilde{\hat{H}} = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \hat{H}_I e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}. \quad (10)$$

Substituindo a equação (8) na equação (10), usando:

$$e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (11)$$

obtemos:

$$\tilde{\hat{H}} = \hbar g(\sigma_+ \hat{a} e^{i(\omega_{eg}-\omega)t} + \sigma_- \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_{eg}-\omega)t} + \sigma_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_{eg}+\omega)t} + \sigma_- \hat{a} e^{-i(\omega_{eg}+\omega)t}). \quad (12)$$

A aproximação de ondas girantes fundamenta-se em desprezar os termos que oscilam rapidamente com o tempo. As contribuições dos termos $(\omega_{eg} + \omega)$ na equação (12) são desprezíveis quando comparadas com os termos $(\omega_{eg} - \omega)$. Logo a aproximação de ondas resulta em desconsiderar os termos $\sigma_- \hat{a}$ e $\sigma_+ \hat{a}^\dagger$, que são ditos contra-girantes, na interação átomo-campo. Para complementar podemos observar que os termos muito oscilantes não conservam energia. Com isso, temos:

$$\hat{H}_I = \hbar g(\sigma_+ \hat{a} + \sigma_- \hat{a}^\dagger). \quad (13)$$

Após a utilização da técnica de interação e aproximação de ondas girantes, podemos escrever o hamiltoniano total como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{eg} \sigma_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g(\sigma_+ \hat{a} + \sigma_- \hat{a}^\dagger), \quad (14)$$

que é o hamiltoniano de Jaynes-Cummings. O termo $\sigma_+ \hat{a}$ configura a absorção de luz, em que um fóton é aniquilado do campo no tempo em que o átomo faz uma transição para o estado de maior energia ($|g\rangle \rightarrow |e\rangle$). O termo $\sigma_- \hat{a}^\dagger$ configura a emissão de luz, em que um fóton é criado no tempo em que o átomo faz uma transição para o estado de menor energia ($|e\rangle \rightarrow |g\rangle$).

Considerações Finais

Nesse artigo foi desenvolvido os passos para a compreensão do modelo de Jaynes-Cummings, com o intuito de um estudo teórico para que novos artigos sejam desenvolvidos na área de óptica quântica, onde é muito importante o conhecimento do modelo de Jaynes-Cummings. O problema envolvido foi o de um átomo de dois níveis acoplado a uma cavidade óptica, nomeada: cavidade eletrodinâmica quântica (QED). A importância da utilização do modelo de dois níveis é para a facilitação matemática.

Desenvolveu-se então as quantizações para: Oscilador harmônico simples, campo eletromagnético e para o átomo de dois níveis. Onde encontramos os hamiltonianos quânticos para o átomo livre, para o campo eletromagnético e para a interação entre o átomo e o campo. Utilizou-se a aproximação de dipolo para o hamiltoniano de interação. Chegamos ao hamiltoniano de Rabi, utilizamos o método de interação e a aproximação de ondas girantes para chegarmos ao hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

O artigo oferece uma base teórica importante para a compreensão de variadas áreas de assunto dentro da óptica quântica, tais como: Fenômeno dos colapsos e nascimentos, teletransporte quântico, tipos de medidas quânticas, computação quântica, dentre outras.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pela bolsa que foi concedida ao programa de iniciação científica.

Agradecemos as nossas famílias por todo suporte e pelo apoio inestimável.

Agradecimento em especial ao professor Dr. Agnaldo Rosa de Almeida por todas as orientações para a estruturação desse artigo.

Referências

[1] FILHO, W. W. Mecânica Quântica. 2. ed. Goiânia: Editora UFG, 2014. 646 p.

[2] MAHON, J. R. P. Mecânica quântica: desenvolvimento contemporâneo com aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 588 p.

- [3] GRIFFITHS, D. J. Mecânica quântica. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 350 p.
- [4] WINELAND, D. J. et al. Observation of Quantum Jumps in a Single Atom, Physical Review Letters, v. 57, n. 14, p. 1699–1702, 1986.
- [5] HAROCHE, S. et al. Realization of a two-photon maser oscillator, Physical Review Letters, v. 59, n. 17, p. 1899–1902, 1987.
- [6] GLAUBER, Roy J. The quantum theory of optical coherence, Physical Review, v. 130, n. 6, p. 2529–2539, 1963.
- [7] RAMSEY, Norman F. A molecular beam resonance method with separated oscillating fields, Physical Review, v. 78, n. 6, p. 695–699, 1950.
- [8] CARDOSO, W. B.; DE ALMEIDA, N. G. O modelo de Jaynes-Cummings, v. 31, n.12, p. 2359-2375, Dezembro, 2004.
- [9] JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser. Proceedings of the IEEE, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.
- [10] EISBERG, R.; RESNICK, R. Física quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas. 35^a reimpressão. Rio de Janeiro: Elsevier, 1979. 930 p.