

Estudo do Comportamento Caótico na Viga de Moon & Holmes

Luciano Felipe Filho¹ (IC)*.

Clodoaldo Valverde¹ (PQ)*.

1 BR-153, 3105 - Fazenda Barreiro do Meio, Anápolis - GO, 75132-903

A evolução da matemática, física e demais ciências exatas e tecnológicas, abriram novos horizontes para estudiosos e pensadores, em que alguns eram fascinados pelos movimentos. O estudo da dinâmica compreende em buscar entender a forma de que um sistema evolui no tempo, tentando levar em considerações as suas condições iniciais e tentando prever os seus possíveis resultados.

Após algum tempo parado, o estudo de comportamentos caótico volta a tomar força com a invenção dos computadores. A praticidade e velocidade na elaboração de cálculos e gráficos tornou o estudo em todas as áreas mais viável. Um meteorologista americano, munido desses recursos, percebeu uma forma de comportamento diferente que merecia atenção. Assim foi iniciada a ideia de Caos.

A partir daí vários intelectuais tentaram problematizar e encontrar situações as quais possam ser previstos resultados antes considerados impossíveis. Ao longo deste trabalho, serão discutidos alguns tópicos e conceitos importantes voltados para o estudo de um desses profissionais.

Palavras-chave: Diferencial. Comportamento. Caos. Duffing.

Introdução

Estudar a dinâmica, ou seja, o estudar o movimento significa identificar a relação dos fatos ou evolução de um sistema com a evolução do tempo. Nesse contexto, é necessário um agente matemático capaz de relacionar os resultados obtidos com o tempo, onde o resultado final do estudo é chamado de espaço fase (CASTANEDA; PORTO JÚNIOR, 2002).

Essa área da ciência sempre foi fundamentada em ferramentas primeiramente propostas por Newton, as chamadas equações diferenciais. Porém esses casos eram extremamente complexos, o que levou vários pesquisadores a desacreditarem sobre o assunto (STROGATZ, 1994).

Entretanto, no fim do século XIX, o francês Henri Poincaré introduziu um novo modo de interpretação. Para ele, valia mais uma análise qualitativa de um sistema do que

quantitativa, ou seja, era mais importante o conhecimento de todos os possíveis comportamentos do que os detalhes de apenas um de seus produtos (DEVANEY, 1992). Foi Poincaré que introduziu a ideia de caos, sistemas determinísticos que apresentam uma evolução desproporcional por serem extremamente sensíveis as suas condições de início.

O estudo do Caos permaneceu estático até a metade do século XX, e com a criação do computador em 1950, tornou-se possível a realização de equações e gráficos que antes não eram possíveis. Em 1965, Lorenz, um meteorologista americano, estudou a influência do caos nos seus modelos, percebendo que quando um mesmo modelo colocado em duas situações com dados de entrada pouco diferentes, tomaram uma evolução totalmente discrepante. Ele percebeu que nos gráficos formados, os resultados criavam uma forma de borboleta, sendo atraídos para um ponto de forma inexplicável, chamado de “atrator estranho” (Figura 1).

Atrator estranho de Lorenz.

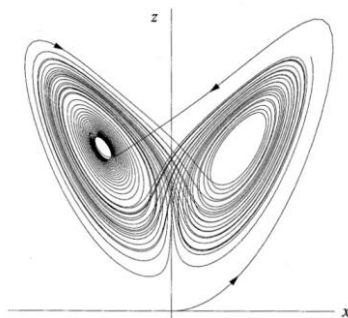


Figura 1. Fonte: (STROGATZ, 1994).

Visto que a natureza não se comporta de forma uniforme, esta teoria passou a ser aplicada para estudar fenômenos ligados a meteorologia, sobre o mecanismo das tempestades. Com o passar do tempo, ela começou a ser aplicada nas mais diversas áreas, até em economia e medicina (DRUKER; CAOS; YORKE, 2003) (PIMENTA, [S.d.]).

Material e Métodos

Utilizando o modelo da viga de *Moon & Holmes*, que é composto por uma viga metálica presa em um suporte que em sua base possui dois ímãs, é possível estudar o comportamento caótico pela flambagem da mesma pela equação de Duffing (MOON, 1980). Vários problemas de dinâmica não linear podem ser representados

na forma desta equação, que é usada para estudar a estabilidade de um oscilador mecânico forçado (MOON, 1980)(VICANCO, 2013).

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx \pm \delta x^3 = F_0 \cos(\omega t), \quad (1)$$

onde:

ω – frequência de oscilação

δ – termo de não linearidade

α - coeficiente de amortecimento

k – constante de mola

F – forçamento

Como visto, um sistema dinâmico evolui no tempo, portanto pode ser representado da seguinte forma,

$$\dot{x} = F(x). \quad (2)$$

Para que o estudo seja facilitado, utilizamos os pontos fixos do sistema. Estes pontos são estacionários, ou seja, ele não varia com o passar do tempo, portanto,

$$F(x) = 0. \quad (3)$$

Isolando $\ddot{x}$, chegamos na seguinte situação,

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx \pm \delta x^3 + F\cos(\omega t). \quad (4)$$

O objetivo deste trabalho foi mostrar, por meio de ferramentas gráficas e pela equação de *Duffing*, o comportamento caótico que atua na viga de *Moon & Holmes*. Desta forma, obtendo a evolução no tempo e o espaço fase do sistema.

Para o desenvolvimento do projeto, primeiramente, foi realizado levantamento bibliográfico em várias fontes, dando prioridade as que se tratavam de equações diferenciais, equação de *Duffing*, modelos teóricos e principalmente o modelo propriamente dito de *Moon & Holmes*. Alguns materiais de FORTRAN 77 também foram utilizados para o desenvolvimento do programa.

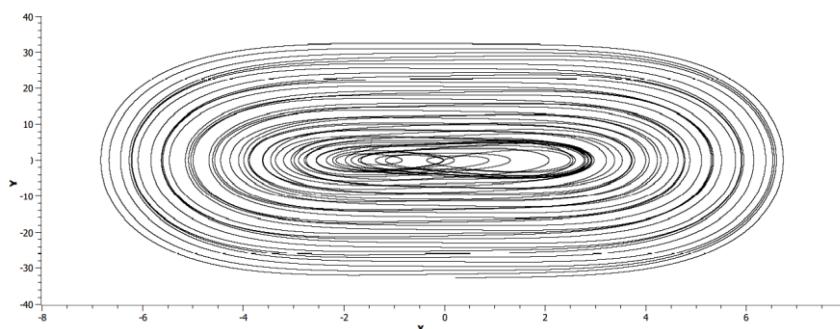
Para a elaboração dos resultados, foram utilizados softwares desenvolvidos pelo autor programados na linguagem FORTRAN 77, por conta de sua simplicidade, praticidade e velocidade no processamento. Alguns programas prontos, como Maple 17 foram utilizados para que fosse possível a aferição e desenvolvimento de alguns dados. Lançando-se mão desses dados gerados por estes programas e com a ajuda de Softwares gráficos, como o SciDavis na sua versão 1D013, de 05 de junho de

2016, e adquirido no site do próprio fabricante, foi possível a realização dos gráficos que se mostraram bastante complexos.

Resultados e Discussão

Caso o objeto deste trabalho fosse um sistema linear, a mudança de qualquer um de seus fatores influenciariam apenas na frequência ou amplitude das movimentações de um sistema, mas a natureza do problema não muda, ou seja, as características qualitativas são as mesmas. Agora, quando se trata de sistemas não-lineares, a complexidade aumenta. Esse tipo de problema é sensível as suas condições de início, sendo que apenas a variação em qualquer um de seus parâmetros pode mudar todo o conjunto.

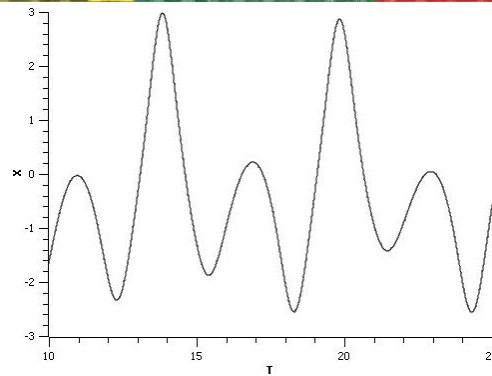
Imagem 1. Espaço Fase 1.



Fonte: Autor.

Utilizando-se de referências bibliográficas, pode ser percebido que ao aplicarmos como entrada os parâmetros apresentados, o sistema apresenta um comportamento não caótico, ou seja, o sistema é comportado e não apresenta atrator. Pode-se perceber que a evolução desse tipo de situação é controlada e acontece de forma periódica e prevista.

Imagem 2. Evolução no Tempo 1.



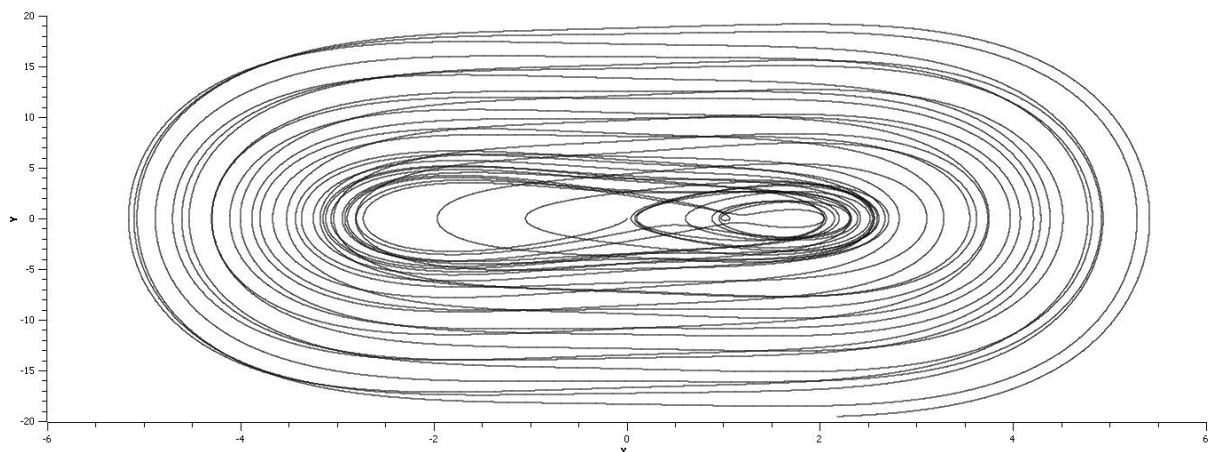
Fonte: Autor.

Os dados apresentados foram obtidos pelos seguintes parâmetros: $\alpha = 0.005$, $\beta = 1$, $\Omega = 1$, $\omega_0^2 = -0.2$ e finalmente, $\mu = 4$. Os quais, representam na equação de Duffing,

respectivamente, um parâmetro associado ao número de Prandtl, que relaciona a viscosidade e condutividade térmica, um gradiente de temperatura, frequência de forçamento, frequência natural do sistema e amplitude do forçamento.

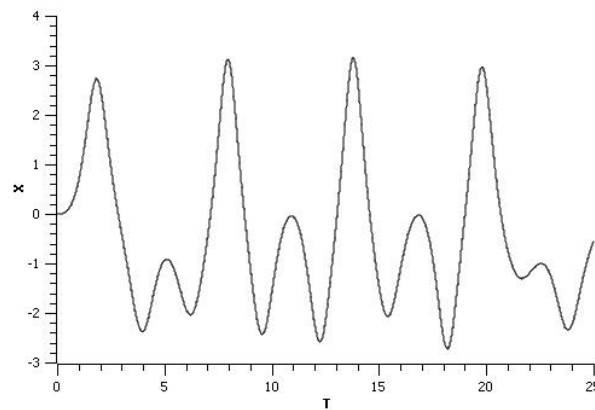
A partir da variação da frequência natural do sistema, de -0.2 para -1, pode-se perceber uma diferença muito grande em seu comportamento.

Imagem 3. Espaço fase 2.



Fonte: Autor.

Imagem 4. Evolução no tempo 2.

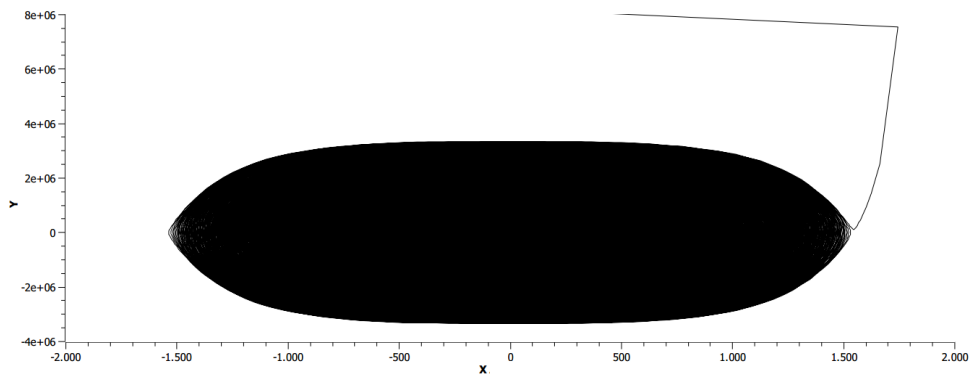


Fonte: Autor

Pode-se perceber a não periodicidade causada por essa variação, tanto na sua evolução no tempo, quanto em seu espaço fase, cujo o centro se aproximou muito mais de um ponto, representando a possível presença de um atrator. O que caracteriza o comportamento caótico.

Agora, em um exemplo mais drástico, com a alteração de todos os parâmetros, vejamos as consequências das alterações.

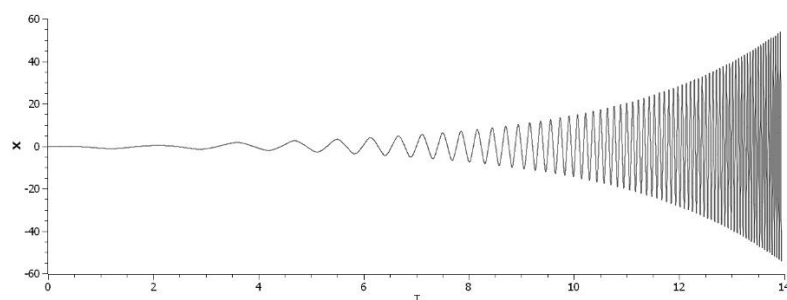
Imagem 5. Espaço Fase 3.



Fonte: Autor.

A quantidade de informações geradas pelas mudanças nos valores foi tanta que torna a leitura do gráfico impossível, provando uma vez mais, a sensibilidade desse tipo de sistema as suas condições de entrada. As quais, para este tipo de gráfico foram: $\alpha = 1$, $\beta = 10$, $\Omega = 3$, $\omega_0^2 = -0.9$ e $\mu = 6.5$.

Imagem 6. Evolução no tempo 3.



Fonte: Autor.

A evolução do sistema também foi alterada, mostrando que o sistema iterativo acumula cada vez mais informações, levando o comportamento caótico ao extremo.

Considerações Finais

A elaboração deste trabalho teve como principal objetivo o desenvolvimento do conhecimento científico no ramo do estudo caótico, levando em consideração um problema específico, mostrando as possibilidades deste tipo de sistema. Foi mostrando durante a realização do trabalho que esse tipo de sistema pode tomar proporções extremas e perceptíveis, como quando comparamos os gráficos 1 e 3 apresentados.

Por ser uma área de estudos complexa, não existem tantos trabalhos se aprofundando nesses assuntos. Por isso, uma das outras ambições desse trabalho era fomentar possíveis estudos futuros sobre esses casos, os quais parecem promissores.

Agradecimentos

A universidade e seu corpo docente, os quais possibilitaram a minha entrada no estudo superior e consequentemente no ramo de pesquisas.

Ao meu orientador Clodoaldo Valverde, por disponibilizar essa oportunidade e pela paciência e suporte pelo pouco tempo que lhe coube, pelas orientações, desafios propostos e correções.

Aos meus pais e namorada, pelo amor, apoio e incentivo.

E todos que fizeram parte direta ou indiretamente do meu percurso durante a realização desta pesquisa.

Referências

CASTANEDA, Alberto Martinez; PORTO JÚNIOR, Sabino da Silva. INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS. **UFRGS** p. 16 , 2002.

DEVANEY, Robert L. *A first course in chaotic dynamical system: theory and experiment* . [S.l: s.n.]. Disponível em: <<http://cds.cern.ch/record/1416922>>. , 1992

DRUKER, Peter; CAOS, A Teoria; YORKE, James. Teoria do caos. p. 1–3 , 2003.9788483026946.

MOON, F C. Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator: Strange Attractors. **Journal of Applied Mechanics** v. 47, n. 3, p. 638–644 , 1980.

OLIVEIRA. Eduardo Lima De. **ANÁLISE DA DINÂMICA DE UM PÊNDULO ELÁSTICO COM EXCITAÇÃO VERTICAL NO SUPORTE**. São Paulo: [s.n.], 2006. Disponível em:

<https://www.dcce.ibilce.unesp.br/pos/webfacil/publico/File/mdl_alunos_diss_358_0.pdf>.

PIMENTA, Carlos. *E c o n o m i a , d i a l e t i c a e c a o s .* , [S.d.].

STROGATZ, Steven H. *Nonlinear Dynamics and Chaos* .**Library**. [S.l: s.n.]. Disponível em: <<http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Nonlinear+Dynamics+and+Chaos:+With+Applications+to+Physics,+Biology,+Chemistry+and+Engineering#0>>. , 1994

VICANCO, Jerver Elio Manuico. Análise da Dinâmica não linear no balaço parametrico de uma embarcação pesqueira. **Journal of Chemical Information and Modeling** v. 53, n. 9, p. 1689–1699 , 2013.9788578110796.