

Modelagem matemática de fenômenos geométricos e físicos através de Equações Diferenciais Ordinárias: Catenária e Curva de Reflexão

André Luís Pereira Souza* (IC), Miguel Antônio de Camargo (PQ)

*andreluis020@hotmail.com

Universidade Estadual de Goiás (UEG) – Câmpus Jussara

Resumo: Equação Diferencial é uma disciplina da matemática que tem diversas aplicações nas ciências e tecnologias humanas, os conteúdos referentes à esta disciplina dividem-se em dois tipos, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e as Equações Diferenciais Parciais (EDP). Este artigo foi concebido através de um projeto de iniciação científica, onde foram analisados diversos teóricos que discorrem acerca do tema Equações Diferenciais Ordinárias e as aplicações destas para a modelagem matemática de soluções para questões relacionadas a fenômenos geométricos e/ou físicos. Alguns dos fenômenos analisados durante o projeto e que foram selecionados para compor este artigo, são a Catenária e a Curva de Reflexão. Os autores utilizados para a elaboração deste texto foram Figueiredo e Neves (2005), Zill e Cullen (2001) e Zill (2003), todos discorrem acerca dos estudos em EDO e suas aplicações para a resolução de problemas advindos da geometria, da física, da engenharia, da economia, da estatística e de diversas outras ciências. O objetivo deste artigo é evidenciar a importância que as EDO tem para o desenvolvimento científico, em especial para a resolução de problemas advindos dos diversos tipos de ciências.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Modelagem Matemática. Catenária. Espelho Parabólico. Curva de reflexão.

Introdução

Equações Diferenciais são importantes ferramentas para a resolução de problemas advindos da geometria, da física, da engenharia, da economia, da estatística e de diversas outras ciências. A matemática é a linguagem das ciências e os estudos nessa área são fundamentais para o desenvolvimento das tecnologias presentes nas sociedades humanas, no que tange as equações diferenciais, vários são os exemplos de aplicações em diversas ciências como a física e a química.

Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz foram os precursores nos estudos em equações diferenciais, e muito do que Newton desenvolveu nessa área da matemática foi essencial nas suas pesquisas em mecânica, inclusive em suas famosas três leis foi imprescindível o uso de equações diferenciais. Este artigo é

parte de um projeto de iniciação científica, e os exemplos aqui apresentados foram pesquisados e estudados durante a realização do mesmo, diversos foram os exemplos, mas a critério foram escolhidos dois para fazer parte deste trabalho.

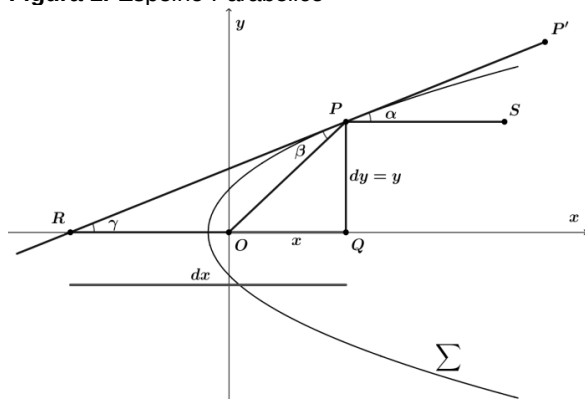
Os dois exemplos selecionados para compor este artigo são: a curva de reflexão, um famoso problema da óptica geométrica, e a catenária, ou cabo suspenso, que é um problema antigo da física e que permaneceu diversos anos sem solução, e foi resolvido pela primeira vez por Leibniz através de equações diferenciais. Diversos foram os problemas e questões analisados durante o projeto de iniciação científica, e estes compõem um trabalho maior.

Curva de Reflexão

O problema da Curva de Reflexão também conhecido por Espelho Parabólico tem como questão central determinar o formato de um espelho que tenha a seguinte propriedade: no momento em que um feixe de raios incide sobre ele, os raios refletidos se concentrarão em um único ponto específico que é o foco do espelho.

Para encontrar a curva que tenha a propriedade citada anteriormente será necessário utilizar conceitos físicos e geométricos, o conceito físico é a Lei da Reflexão da Ótica Geométrica que diz que o ângulo de incidência α é igual ao ângulo de reflexão β , logo pode-se afirmar que $\alpha = \beta$. Além disso, iremos supor que a curva procurada seja representada pelo gráfico de uma função derivável, $x = g(y)$, e para facilitar os cálculos escolhemos um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que o foco do espelho seja a origem do plano cartesiano.

Figura 1: Espelho Parabólico



Fonte: Elaborada pelo autor

O segmento $\overline{RP}$ é parte da reta tangente à curva Σ no ponto P , o segmento $\overline{OP}$ faz com $\overline{RP}$ um ângulo β e o segmento $\overline{PS}$ faz com $\overline{PP'}$ um ângulo α . Como citado anteriormente é evidente que $\alpha = \beta$, e como α e γ são ângulos com lados paralelos conclui-se que $\alpha = \gamma = \beta$.

A partir do gráfico é possível observar que:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\gamma)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ} + \overline{RO}}$$

O triângulo ROP é isósceles o que implica que $\overline{OP}$ e $\overline{RO}$ tem o mesmo comprimento dessa forma temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ} + \overline{OP}}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para simplificar os cálculos utilizamos alguns artifícios matemáticos para transformar a equação diferencial original em

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{x}{y} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \right)$$

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} \right)$$

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \right)$$

Fazendo uma mudança de variável temos:

$$u = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow x = yu$$

$$\frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$$

Reescrevendo a equação temos:

$$u + y \frac{du}{dy} = \left(u + \sqrt{1 + u^2} \right)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\ln|y| + k_1 = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

Fazendo uma mudança de variável obtemos:

$$u = \tan(\theta)$$

$$du = \sec^2(\theta)$$

Reescrevendo a equação temos:

$$\ln|y| + k_1 = \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} d\theta$$

$$\ln|y| = \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| + \ln(k_2); k_2 > 0$$

$$\ln|y| + k_1 = \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{\sec^2(\theta)}} d\theta$$

$$\ln|y| + \ln(k) = \ln|u + \sqrt{1 + u^2}|$$

$$\ln|y| + k_1 = \int \sec^2(\theta) d\theta$$

$$\ln|y \cdot k| = \ln|u + \sqrt{1 + u^2}|$$

$$\ln|y| = \ln|\tan(\theta) + \sec(\theta)| + k_2$$

$$y \cdot k = u + \sqrt{1 + u^2}$$

$$\ln|y| = \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| + k_2$$

$$ky = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

$$\ln|y| = \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| + k_2$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por y obtemos:

$$ky = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \quad (\cdot y)$$

$$ky^2 = y \frac{x}{y} + y \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}$$

$$ky^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(ky^2 - x) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado:

$$k^2 y^4 - 2ky^2 x + x^2 = x^2 + y^2$$

$$k^2 y^4 - 2ky^2 x = y^2 \quad (\div y^2)$$

$$k^2 y^2 - 2kx = 1$$

$$k^2 y^2 - 1 = 2kx \quad (\div 2k)$$

$$\frac{k^2 y^2}{2k} - \frac{1}{2k} = \frac{2kx}{2k}$$

$$\frac{ky^2}{2} - \frac{1}{2k} = x$$

Portanto a equação procurada é:

$$x = \frac{k}{2} y^2 - \frac{1}{2k}$$

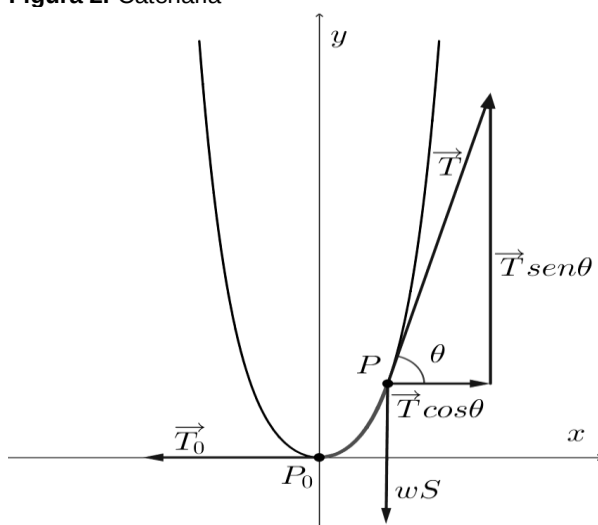
Nota-se que essa equação representa uma família de parábolas, e para encontrar a figura tridimensional que tenha o formato do espelho parabólico é necessário efetuar uma rotação em torno do eixo, obtendo dessa forma um parabolóide de revolução.

E esse parabolóide de revolução mantém as propriedades físicas da curva de reflexão. Quando os feixes de raios que incidem sobre qualquer local da superfície da figura geométrica espacial são refletidos em um ponto específico que é o foco do espelho.

Catenária

“O problema que agora consideramos é o da determinação da forma tomada por um cabo flexível e inextensível, suspenso em dois pontos A e B, e sujeito a seu próprio peso.” (FIGUEIREDO e NEVES, 2005, p. 39). Dizer que o cabo é flexível, significa que a tensão é sempre no sentido da tangente, e inextensível significa que o cabo não pode ser estendido sem a aplicação de uma de força externa. Quem nomeou a curva que descreve o cabo como catenária foi Gottfried Wilhelm Leibniz, no ano de 1691.

Figura 2: Catenária



$P_0 = (0,0)$ é o ponto mais baixo da corda;

$P = (x,y)$ é um ponto qualquer da corda;

S é o comprimento da corda de P_0 até P ;

w é a densidade linear da corda.

Lembrando que:

$$\text{densidade linear} = \frac{\text{peso}}{\text{comprimento}}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

A parte da corda ente P_o e P está em equilíbrio sobre a ação de três forças:

1. A tensão $\vec{T}_0$ no ponto $P_o = (0, 0)$;
2. A tensão $\vec{T}$ no ponto $P = (x, y)$;
3. O peso wS da corda.

Para iniciar a resolução do problema admitimos que existe uma função $y = f(x)$ derivável e cujo gráfico represente a curva da catenária. Então dessa forma existe $y' = f'(x)$ e pela escolha conveniente do sistema de coordenadas representado acima, observamos pelo gráfico que as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, são satisfeitas e, além disso, também pelo gráfico é possível afirmar que:

$$T \sen \theta = wS \quad (1)$$

$$T \cos \theta = T_0 \quad (2)$$

Dividindo (1) por (2) obtemos:

$$\frac{wS}{T_0} = \frac{T \sen \theta}{T \cos \theta}$$

$$\frac{wS}{T_0} = \frac{\sen \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{wS}{T_0} = \tan \theta$$

O que implica:

$$f'(x) = \tan \theta = \frac{wS}{T_0}$$

$$f'(x) = \frac{w}{T_0} \cdot S(x)$$

$$f'(x) = \frac{w}{T_0} \cdot \int_0^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Pelo teorema fundamental do cálculo temos:

$$f''(x) = \frac{w}{T_0} \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Para facilitar a escrita usaremos as seguintes simplificações:

$$c = \frac{w}{T_0};$$

$$f'(x) = z;$$

$$f''(x) = z'.$$

Desta forma temos:

$$z' = c \cdot \sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = c \cdot \sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = c \, dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int c \, dx$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$z = \tan \theta$$

$$\Rightarrow dz = \sec^2 \theta \, d\theta$$

Obtemos:

$$\int \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \, d\theta = cx + k_1$$

$$\int \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta}} \, d\theta = cx + k_1$$

$$\int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} \, d\theta = cx + k_1$$

$$\int \sec \theta \cdot \frac{(\sec \theta + \tan \theta)}{(\sec \theta + \tan \theta)} \, d\theta = cx + k_1$$

$$\int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} \, d\theta = cx + k_1$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$u = \sec \theta + \tan \theta$$

$$\Rightarrow du = (\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta) \, d\theta$$

Obtemos:

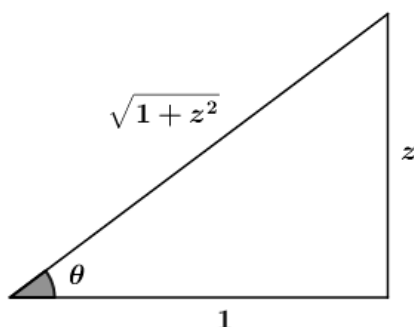
$$\int \frac{1}{u} \, du = cx + k_1$$

$$\ln|u| + k_1' = cx + k_1$$

$$\ln|\sec \theta + \tan \theta| = cx + k_2$$

Para escrever essa equação em função de z utilizamos a substituição:

Figura 3: Triângulo Retângulo



$$\tan \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Obtemos dessa forma:

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{\sqrt{1+z^2}}{1} + \frac{z}{1} \right| = cx + k_2$$

$$\Rightarrow \ln \left| \sqrt{1+z^2} + z \right| = cx + k_2$$

Pela condição inicial $f'(0) = y'(0) = z(0) = 0$ temos:

$$\ln \left| \sqrt{1+0^2} + 0 \right| = c \cdot 0 + k_2$$

$$0 = k_2$$

$$\ln|1| = k_2$$

$$\Rightarrow k_2 = 0$$

Logo:

$$\ln \left| \sqrt{1+z^2} + z \right| = cx$$

$$\sqrt{1+z^2} + z = e^{cx}$$

$$e^{\ln|\sqrt{1+z^2}+z|} = e^{cx}$$

$$\sqrt{1+z^2} = e^{cx} - z$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$(\sqrt{1+z^2})^2 = (e^{cx} - z)^2$$

$$2z = e^{cx} - e^{-cx}$$

$$1 + z^2 = e^{2cx} - 2e^{cx}z + z^2$$

$$2y' = e^{cx} - e^{-cx}$$

$$1 = e^{2cx} - 2e^{cx}z$$

$$\int 2y' dy = \int (e^{cx} - e^{-cx}) dx$$

$$2e^{cx}z = e^{2cx} - 1$$

$$2y = \frac{1}{c} e^{cx} + \frac{1}{c} e^{-cx} + k_3$$

$$2z = \frac{e^{2cx}}{e^{cx}} - \frac{1}{e^{cx}}$$

Pela condição inicial $y'(0) = 0$ temos:

$$2.0 = \frac{1}{c} e^{c.0} + \frac{1}{c} e^{-c.0} + k_3$$

$$0 = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + k_3$$

$$0 = \frac{1}{c} e^0 + \frac{1}{c} e^0 + k_3$$

$$k_3 = -\frac{2}{c}$$

Logo:

$$2y = \frac{1}{c} e^{cx} + \frac{1}{c} e^{-cx} - \frac{2}{c}$$

$$y = \frac{1}{2c} e^{cx} + \frac{1}{2c} e^{-cx} - \frac{1}{c}$$

$$y = \frac{1}{2c} e^{cx} + \frac{1}{2c} e^{-cx} - \frac{2}{2c}$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{e^{cx} + e^{-cx}}{2} - 1 \right]$$

Outra maneira de escrever a solução é utilizando a função cosseno hiperbólico:

$$y = \frac{1}{c} \left[\cosh(cx) - 1 \right]; c = \frac{w}{T_0}$$

Considerações Finais

Através do projeto de iniciação científica ocorreram estudos aprofundados em equações diferenciais, onde pode-se entender a importância desta disciplina. Foi observado que ela propicia conhecimentos que podem ser aplicados em diversas ciências, e dessa forma é essencial para a resolução de diversos problemas advindos da física, engenharia e várias outras áreas do conhecimento humano.

O problema da catenária e o Espelho Parabólico são alguns dos vários exemplos de aplicações de Equações Diferenciais, além disso, o Espelho Parabólico é um excelente problema para exemplificar a importância dos estudos em equações diferenciais para o cotidiano das sociedades humanas, afinal o desenvolvimento de antenas parabólicas – que são itens comumente encontrados nas casas de todas as pessoas – só pode ocorrer através da equação dessa curva. Espera-se que através deste artigo fique clara a importância que as Equações Diferenciais Ordinárias desempenham nos estudos científicos.

Referencias

FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria; **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: SBM, IMPA. 2005.

ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais, volume 1** / tradução Antonio Zumpano; revisão técnica Antonio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem** / tradução Cyro de carvalho Patarra; revisão técnica Antônio Luis Pereira. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.