A matemática do Espirógrafo

Roniel Antonio de Araújo[1]

UEG - Câmpus Henrique Santillo – BR-153, 3105 - Fazenda Barreiro do Meio, Anápolis - GO, 75132-903.

Resumo: Este presente trabalho tem por objetivo relatar estudos feitos sobre a matemática das belas curvas geradas por um brinquedo plástico composto por várias engrenagens redondas e anéis dentados, chamado espirógrafo. Buscamos estudar as equações paramétricas dessas curvas e a variação dos raios e posições dos furos das engrenagens que produzem diferentes curvas, dando ênfase em estudo de representantes especiais das famílias de curvas conhecidas como epitrocoides e hipotrocoides relatando os resultados obtidos em capítulos. Tais procedimentos realizados, foram levantados sob alicerce de uma revisão bibliográfica de materiais já existentes, com o intuito de produzir novos conhecimentos. No entanto, será apresentado através deste, um pouco do que está sendo trabalhado, assim como alguns resultados obtidos, com o foco principal em uma das representantes das curvas produzidas pelo espirógrafo, a cicloide. Em suma, com toda a análise e pesquisa que está sendo realizada, neste momento, foi possível chegar a uma conclusão de que, a matemática é vasta e bela e aplicável a qualquer situação, até mesmo em brinquedos, valendo a pena estudá-la, sendo a mesma, uma das percursoras do desenvolvimento da humanidade.

Palavras-chave: Espirógrafo, curvas, cicloide.

Introdução

É notável que o “O Cálculo Diferencial e Integral” é uma área de estudo da Matemática com diversas aplicações nas diversas áreas como: a física, engenharia, arquitetura, dentre outras. Entretanto, visando essa temática, a proposta desse projeto de pesquisa é de estudar curvas produzidas por um brinquedo chamado espirógrafo, um brinquedo utilizado para desenho geométrico que consiste em um conjunto de engrenagens, com janelas circulares dentadas, onde fixadas em uma folha de papel e empurrados por uma caneta cuja ponta é colocada em um dos furos da roda circular dentada móvel, irá produzir curvas matemáticas conhecidas como epitrocoides e hipotrocoides.

Nesse contexto, uma das propostas será o estudo de uma aplicação ao Cálculo Diferencial e Integral que, de certo modo, intrigou e se tornou uma das

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática (UEG). E-mail: araujoronielantonio@gmail.com
Estudante (IC) e Pesquisador (PQ).

maiores disputas entre os cientistas durante o século XVII: a Cicloide. Inicialmente, a metodologia que será apresentada nesse relato centrara-se em uma pesquisa bibliográfica. Entretanto, no decorrer da análise bibliográfica e pesquisas que estão sendo feitas de tal assunto, deparamos com muitos estudiosos do século XVII que focaram seus estudos na Cicloide. No entanto, conhecer a história por trás dessa "famosa curva" nos irá preparar para compreender e estudar as curvas, propriamente ditas, representantes da Cicloide: a epitrocoides e hipotrocoides. Para isso utilizaremos, como uma das ferramentas, o espirógrafo.

Esse brinquedinho plástico chamado espirógrafo, foi concebido por Bruno Abdank e foi inventado como um jogo didático pelo engenheiro britânico Denys Fisher que o exibiu em 1965 na Feira Internacional de Brinquedos de Nuremberg. Posteriormente foi produzido por sua empresa. Entretanto, os direitos de distribuição foram adquiridos por Kenner, que o introduziu no mercado Norte Americano em 1966. Então, nesse mesmo ano, a fábrica de brinquedos Kenner apresentou o espirógrafo pela primeira vez.

Resultados e Discussão

Sabendo que as curvas podem ser modeladas por equações diferenciais, iremos, nesse capítulo, identificar e resolver a equação diferencial que conduz a cada tipo de curva estudada, fazendo o enquadramento histórico em que foi descoberta.

1.1 . Cicloide

A cicloide é uma curva com propriedades geométricas particulares que de certa forma, intrigou muitos cientistas matemáticos no tempo na qual ela foi descoberta.

Mas como surgiu a cicloide? A cicloide teve seus primeiros indícios entre 1479 e 1566 quando Charles Bovelles, mais precisamente em 1501, quando o mesmo tentava quadrar um círculo em um trabalho de geometria publicado em Paris. Entretanto, quem a designou como cicloide foi Galileu Galilei em 1599. Os primeiros estudos detalhistas que sem tem conhecimento são devidos a Blaise Pascal (1623 – 1662) que a chamou de "roulette", Giles Person de Roberval (1602 –

1675) chamando-a de “trochoide”, que significa roda em grego, e a Evangelista Toricelli (1608 – 1647), um discípulo de Galileu Galilei (1564 – 1642). Cada um desses estudiosos teve sua contribuição para que tal curva se desse como, grandiosa e importante, inclusive o próprio Galileu Galilei, que também a estudou e referiu-se a sua forma graciosa, apontando-a como sugestão para o perfil dos arcos de construções em arquitetura.

Dentre os vários estudos e provas realizadas por esses estudiosos sobre a cicloide, se destacam algumas de suas propriedades:

- A área sob um arco da cicloide é três vezes a área do círculo que a gera;
- O comprimento de um arco da cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo que a gera, consequentemente, o comprimento desse arco é oito vezes o raio do círculo que a gera.

Tais propriedades serão demonstradas durante o decorrer desse projeto.

Tempos depois, no final do século XVII, a cicloide volta aos estudos rigorosos, aparecendo como solução de outro problema importante da ciência, conhecido como “braquistócrona” ou problema do “tempo mínimo”. Tal problema foi lançado por Johann Bernoulli em 1696 como desafio aos matemáticos na revista científica alemã Acta Eruditorum com a seguinte situação: suponhamos que duas hastes de madeira sejam fixadas ao acaso em uma parede (obs.: não na mesma vertical), e que a haste superior seja ligada a inferior por um barbante flexionado na forma de uma curva lisa. Com base nessas informações, qual a forma do barbante no qual uma partícula deslizará sem atrito sob a influência da gravidade, para passar da haste superior a inferior no menor tempo possível? De certa forma, essa situação despertou grandes interesses por matemáticos da época. O primeiro a resolver tal situação foi Isaac Newton (1642 – 1727), posteriormente por Leibniz (1646 – 1716), por Jakob Bernoulli (1654 – 1705), irmão mais velho de Johann e pelo próprio. No entanto, o problema da “braquistócrona” foi marcante por que despertou uma linha de pesquisa importantíssima para a ciência, chamada de cálculo das variações, que tratava com estudos relacionados á busca de taxas de máximos e mínimos de funções contínuas.

1.1.1. Definição da cicloide

Definição: *Consideremos, no plano Oxy, uma circunferência* ***C*** *de centro* ***O****(a,b), com a,b > 0 e raio* ***r****, que rola sem deslizar sobre o eixo x. Portanto, denominamos como cicloide* **(Figura 4)** *a curva descrita por um ponto P quando C rola sobre o eixo x, sem deslizar.*

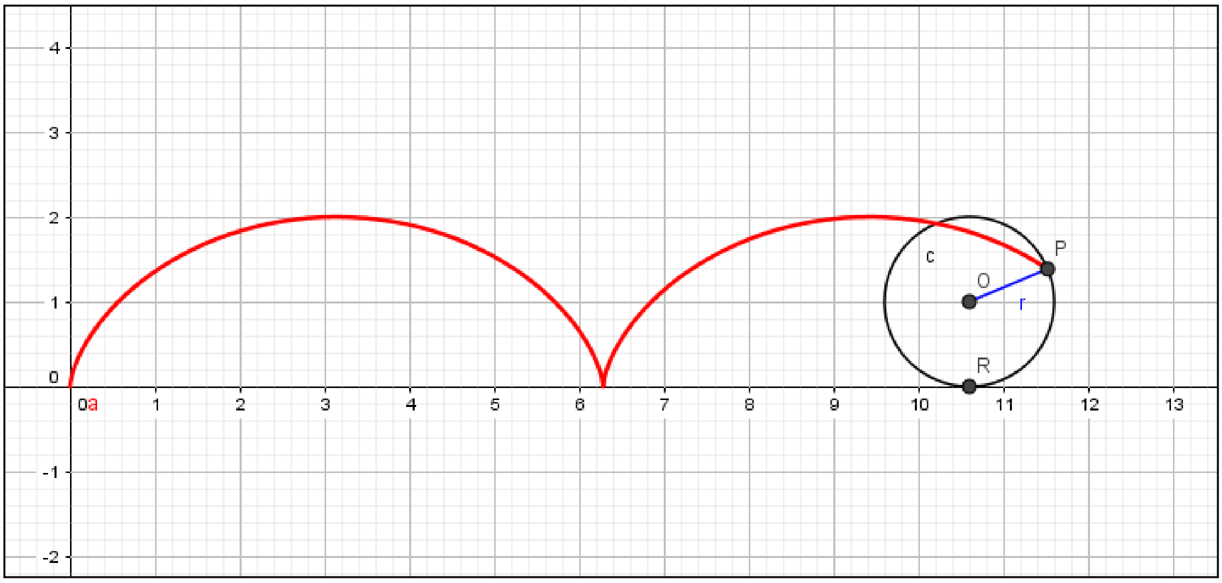

Figura 4: Cicloide gerada pelo software geogebra.

Considerações Finais

Até então, é notável que, a curva cicloide possui uma história rica, uma matemática elaborada e aplicações diretas com a Física. Suas curvas derivadas chamam atenção pela beleza que criam, inclusive, chegando a influenciar o mundo da moda (BRAGGS, 2010). Na Ciência, cada vez mais trabalhos têm aparecido envolvendo a Cicloide, sendo ela sempre “solução” dos problemas. O arco de um violino (MOTTOLA, 2011), as ondas do micro-ondas (RAIO, 2012) ,o espectrômetro de massas, a simulação da gravidade zero em aerodinâmica (BUSTILLOS e SASSINE, 2011) , entre várias outras aplicações são fortes exemplos. Segundo Eves (2011, p. 366): “Essa curva, que é muito rica em propriedades matemáticas e físicas, desempenhou um papel importante no desenvolvimento inicial dos métodos do cálculo”.

Sendo assim, ainda há muito que pesquisar e entender sobre o mundo, e a curva cicloide pode ser a chave para várias perguntas da evolução da Ciência.

Referências

BRAGGS, Steven. **Spirograph**. Disponível em: www.retrowow.co.uk/retro_collectibles/60s/spirograph.php. Acesso em: 06 abr. 2013.

MOTTOLA, R. M. **Comparison of Arching Profiles of Golden Age Cremonese Violins and Some Mathematically Generated Curves. Savart Journal, United States**, p. 1- 18. 15 jun. 2011.

BUSTILLOS, Oscar Vega; SASSINE, André. **A Magia da Curva Cicloide: Braquistócrona e Tautócrona.** São Paulo: Scor Tecci, 2011. 252 p.

RAIO, R. S.. **Microwave Enginnering**. Nova Délhi: Phi, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

RAPOSO C.S.C.M. **Curvas Famosas e não só: teoria, histórias e atividades**. Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores, Universidade de Lisboa, 2013.