ANÁLISE DE PADRÕES NO ARRANJO DAS DUPLAS PRINCIPAIS

Murillo Cabral Silva Fonseca[1*], Lucas Alvares Ferro[2], Stela Mares Corrêa[3]
murillofonseca@outlook.com;

[1*]Matemática, Campus Morrinhos, Rua Quatorze, 625, Jardim América, UEG. Estudante (IC);

[2] Agronomia, Campus Palmeiras, Rua S-7,S/N°, Setor Sul, UEG. Estudante (IC) e bolsista de iniciação científica na UEG;

[3] Agronomia, Campus Palmeiras, Rua S-7,S/N°, Setor Sul, UEG. Pesquisador (PQ) e docente.

Resumo: Busca-se compreender duas questões sobre as duplas principais. O conjunto das duplas principais é infinito? É possível determinar uma forma matemática capaz de gerar todas e somente essas duplas? O avanço com os resultados aqui apresentados, embora talvez não ponham fim ao problema, possam lançar luz sobre nossa compreensão acerca de padrões que envolvem a distribuição das duplas principais.

Palavras-chave: Números primos. Primos gêmeos. Compreensão. Distribuição.

Introdução

O foco do presente estudo não se dá, exclusivamente, sobre números primos; mas acerca de uma classe especial desses números: os *primos gêmeos* (ou *duplas principais*). Entende-se por dupla principal um par de números primos $(p, p+2)$ cuja diferença é 2. Nas palavras de du Sautoy (2007, p. 47-48), "A conjectura dos primos gêmeos [...] questiona se existe um número infinito de primos p tal que o número $p+2$ também seja primo".

Uma dupla principal é um par de números primos cuja diferença entre o maior e o menor é dois. No presente estudo a notação utilizada para representar uma dupla principal é

$$(\varepsilon, \zeta), \tag{1}$$

onde ε é o primo gêmeo menor e ρ o primo gêmeo maior. Assim,

$$\zeta - \varepsilon = 2. \tag{2}$$

As primeiras quatro duplas principais são (3,5), (5,7), (11,13), (17,19).

Um resultado interessante acerca dos números primos veio com o teorema de Dirichlet, segundo o qual há infinitos números primos que possam ser escritos nas formas e 6n-1 e 6n+1 (n$\in Z$); e como toda dupla principal também pode ser escrita como $(p, p+2) = (6n-1, 6n+1)$, poderíamos concluir que há infinitas duplas principais.

Material e Métodos

Formas Algébricas Geradoras de Duplas Principais

Definição 1. Dados a e b inteiros positivos. Se o máximo divisor comum entre a e b é 1, então a e b são coprimos (ou primos entre si).

Teorema (Dirichlet). Dados naturais coprimos a e b, existem infinitos primos da forma $an + b$.

Proposição 1. Existem infinitos números primos das formas $6n+1$ e $6n-1$.

Prova. A prova é direta. De acordo com o teorema de Dirichlet, se a e b são coprimos, então existem infinitos primos da forma $an + b$. Façamos, portanto, $a = 6$ e $b = 1$. Como 6 e 1 são coprimos, logo a proposição é verdadeira. Eis a prova.

Definição 2. Seja $(\varepsilon, \zeta) = (p, p+2) \in P_+$, tal que P_+ é o Conjunto dos Números Primos não negativos. Assim, (ε, ζ) é uma Dupla Principal (ou primos gêmeos).

Proposição 2. Toda dupla principal (ε, ζ), tal que $\varepsilon \neq 3,\ \zeta \neq 5$, pode ser escrita nas formas

$$\zeta = 6k+1, \varepsilon = 6k-1, \text{ , para algum } k > 0.$$

Prova. A prova é direta. Considere p um número primo positivo. Então, fazendo $\frac{p}{6}$, pelo algoritmo da divisão euclidiana, $p = 6m + n, (m, n \in Z : 0 \leq n < 6)$. Todo número divisível por 6 é de uma das formas: $6m, 6m+1, 6m+2, 6m+3, 6m+4, 6m+5$. Mas $6m, 6m+2, 6m+3, 6m+4$ não podem ser primos, pois $6m$ é divisível por 6, $6m+2$ é divisível por 2, $6m+3$ é divisível por 3 e $6m+4$ é divisível por 2. Logo, resta apenas $6m+1$ e $6m+5$.

Façamos $p = \varepsilon = 6m + 5 = 6m + 6 - 1 = 6(m + 1) - 1 = 6k - 1$, com $k = m + 1$. Assim, $\varepsilon + 2 = \zeta = 6k - 1 + 2 = 6k + 1$. Além disso, $6k + 1 - (6k - 1) = 2$. Eis a prova.

Proposição 3. Toda dupla principal (ε, ζ) pode ser escrita nas formas $\varepsilon = |6k - 8| + 1$ e $\zeta = |6k - 8| + 3$, para algum. $k > 0$.

Prova. Todo inteiro ímpar é passível de ser escrito na forma $2l + 1$. Uma vez que todo inteiro primo gêmeo é também um inteiro ímpar, logo todo inteiro primo gêmeo também pode ser escrito na forma $2l + 1$. Portanto, tome $\varepsilon = 2l + 1$, o que implica $\zeta = 2l + 3$. Por tentativa e erro, os inteiros l segundo os quais as formas $\varepsilon = 2l + 1$ e $\zeta = 2l + 3$ geram duplas principais, assumem a forma $l = |3k - 4|$. Donde vêm $\varepsilon = 2|3k - 4| + 1 = |6k - 8| + 1$, assim como $\zeta = 2|3k - 4| + 3 = |6k - 8| + 3$. Eis a prova.

Resultados e Discussão

Não há uma fórmula que gere todos e somente números primos, tampouco primos gêmeos. No entanto, haja vista que as formas $\varepsilon = |6k - 8| + 1$, $\zeta = |6k - 8| + 3$, apresentam não perfeita, mas instigante aproximação de primos e, consequentemente, primos gêmeos. De fato, a sequência[1]

$\{a_k\} = \{(|6k - 8| + 1, |6k - 8| + 3)\}_{k=1}^{166}$

gerada pelas formas modulares em questão é:

(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (23, **25**), (29,31), (**35**, 37), (41,43), (47, **49**), (53, **55**), (59,61), (**65**, 67), (71,73), (**77**, 79), (83, **85**), (89, **91**), (**95**, 97), (101,103), (107,109), (113, **115**), (**119**, **121**), (**125**, 127), (131, **133**), (137,139), (**143**, **145**), (149,151), (**155**, 157), (**161**, 163), (167, **169**), (173, **175**), (179,181), (**185**, **187**), (191,193), (197,199), (**203**, **205**), (**209**, 211), (**215**, **217**), (**221**, 223), (227,229), (233, **235**), (239,241), (**245**, **247**), (251, **253**), (257, **259**), (263, **265**), (269,271), (**275**, 277), (281,283), (**287**, **289**), (293, **295**), (**299**, **301**), (**305**, 307), (311,313), (317, **319**), (**323**, **325**), (**329**, 331), (**335**, 337), (**341**, **343**), (347,349), (353, **355**), (359, **361**), (**365**, 367), (**371**, 373), (**377**, 379), (383, **385**), (389, **391**), (**395**, 397), (401, **403**), (**407**, 409), (413, **415**), (419,421), (**425**, **427**), (431,433), (**437**, 439), (443, **445**), (449, **451**), (**455**, 457), (461,463), (467, **469**), (**473**, **475**), (479, **481**), (**485**, 487), (491, **493**), (**497**, 499), (503, **505**), (509, **511**), (**515**, **517**), (521,523), (**527**, **529**), (**533**, **535**), (**539**, 541), (**545**, 547), (**551**, **553**), (557, **559**), (563, **565**), (569,571), (**575**, 577), (**581**, **583**), (587, **589**), (593, **595**), (599,601), (**605**, 607), (**611**, 613),

(617,619), **(623, 625)**, **(629**, 631), **(635, 637)**, (641,643), (647, **649**), (653, **655**), (659,661), **(665, 667)**, **(671**, 673), (677, **679**), (683, **685**), **(689**, 691), **(695, 697)**, (701, **703**), **(707**, 709), **(713, 715)**, (719, **721**), **(725**, 727), **(731**, 733), **(737**, 739), (743, **745**), **(749**, 751), **(755**, 757), (761, **763**), **(767**, 769), (773, **775**), **(779, 781)**, **(785**, 787), **(791, 793)**, (797, **799**), **(803, 805)**, (809,811), **(815, 817)**, (821,823), (827,829), **(833, 835)**, (839, **841**), **(845, 847)**, **(851**, 853), (857,859), (863, **865**), **(869, 871)**, **(875**, 877), (881,883), (887, **889**), **(893, 895)**, **(899, 901)**, **(905**, 907), (911, **913**), **(917**, 919), **(923, 925)**, (929, **931**), **(935**, 937), (941, **943**), (947, **949**), (953, **955**), **(959, 961)**, **(965**, 967), (971, **973**), (977, **979**), (983, **985**), **(989**, 991).

[1] Na sequência, os números destacados em negrito são compostos e, portanto, juntamente com seu par, não constituem uma dupla principal $p, p+2$. Os números não destacados são primos. Toda dupla principal aparece sob a forma $(p, p+2)$.

Da sequência,

- Total de inteiros: 332;
- Total de números primos: 168, que corresponde a 50,6%;
- Total de números primos gêmeos: 70, que corresponde a 21,08%;
- Total de números não-primos (ou compostos): 94, que corresponde a 28,32%.

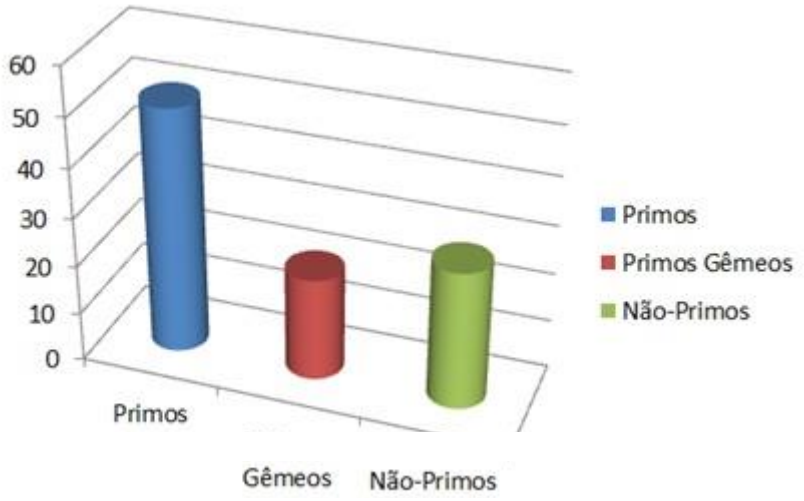

Figura 1. Percentagem de números primos, primos gêmeos e compostos.

O algoritmo que gera os dados da tabela abaixo, em linguagem Pascal, o qual calcula a sequência das duplas principais num dado intervalo, não será apresentado por falta de espaço. Vejamos:

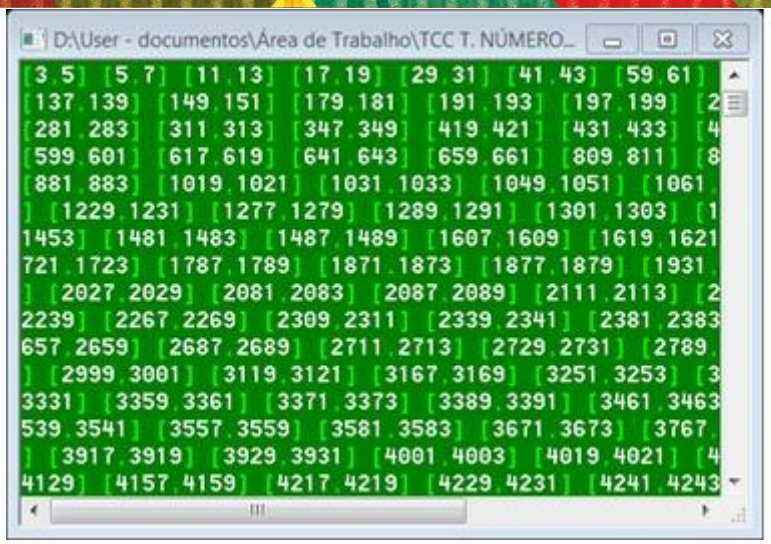

Figura 2. A sequência gerada pelas formas modulares em questão.

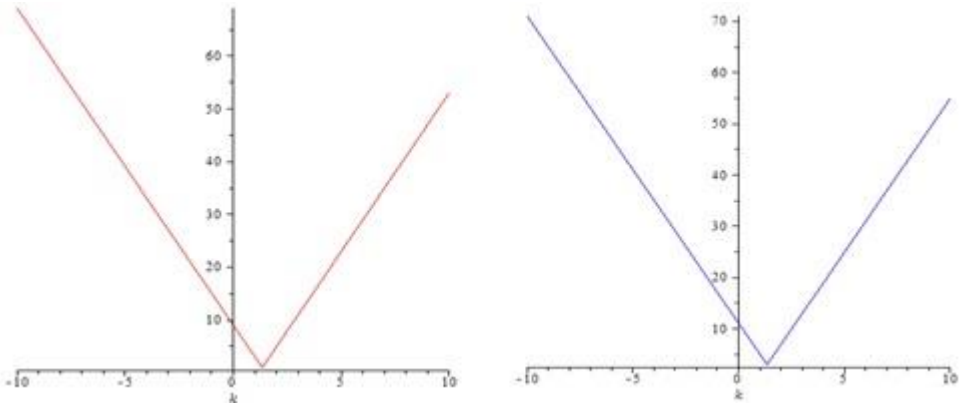

Figura 3. Gráfico da função $f(k) = |6k - 8| + 1$ e $g(k) = |6k - 8| + 3$.

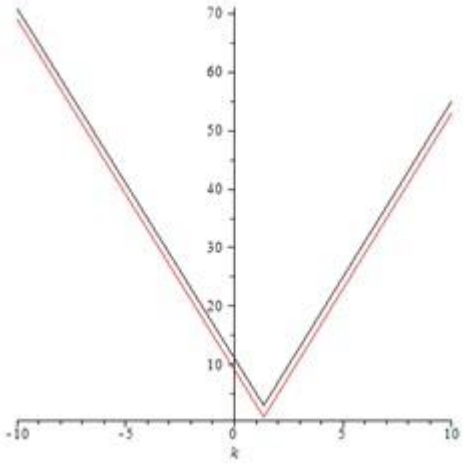

Figura 4. Sobreposição dos gráficos.

Considerações Finais

Os modelos obtidos proporcionaram ao acadêmico uma abrangência na formulação de algoritmos e conjecturas à partir dos estudos das funções harmônicas, a equação de Laplace, o estudo da função divisor e ainda o estudo do vetor *gradiente* o qual indica a direção e o sentido em que os valores de uma função de duas ou mais variáveis reais crescem mais rapidamente e ainda o estudo da singularidade no teorema de Bertrand-Tchebychev, a demonstração destes teoremas e de suas respectivas equações e por fim neste presente trabalho o estudo das formas modulares.

Não há uma fórmula que gere todos e somente números primos, tampouco primos gêmeos. No entanto, haja vista que as formas $\varepsilon = |6k - 8| + 1$, $\zeta = |6k - 8| + 3$, apresentam não perfeita, mas instigante aproximação de primos e, consequentemente, primos gêmeos. Foi possível então criar um algoritmo o qual listasse a sequência gerada pelas formas modulares estudadas.

Salientamos que este estudo teve como foco principal encontrar padrões na distribuição das duplas principais; determinar uma fórmula matemática geradora de duplas principais e dar subsídios à demonstração de outras conjecturas. Apesar de não se determinar uma fórmula que resolva o problema proposto chegou-se na proximidade do resultado, através de conjecturas que gerassem uma quantidade enorme de pares de números primos os quais grande quantidade deles são do tipo $(p, p + 2)$, reforçando assim a importância da continuidade do estudo destas conjecturas.

Agradecimentos

Coordenadoria Central de Bolsas: Iniciação Científica e Tecnológica da Universidade Estadual de Goiás – modalidade BIT/UEG.

Referências

COUTINHO, S. C. **Números Inteiros e Criptografi**a RSA. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

DEVLIN, K. J. **Os Problemas do Milênio**. Segunda edição. Rio de Janeiro: Record, 2008.

DU SAUTOY, M. **A Música dos Números Primos: A História de Um Problema Não Resolvido na Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

EVES, H. **Introdução à Hist**ò**ria da Matemática**. Quinta edição. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

MARTINEZ, F. B. et al. **Teoria dos Números: Um Passeio com Primos e Outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro**. Segunda edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

TENENBLAT K., **"Introdução á Geometria Diferencial**". Editora Universidade de Brasília,1990.