

As Contribuições de Euler para Matemática: As várias fórmulas de Euler

Me. Ricardo Elias Jreige¹

Universidade Estadual de Goiás – Câmpus Jussara

Resumo:

Partindo da importância de se trabalhar teoria e prática em sala de aula e sendo a pesquisa a ferramenta necessária a esta ação, o relato deste texto trata das contribuições de Leonhard Euler (1707-1783) para o ensino da matemática, ressaltando certos aspectos de sua vida e alguns resultados desenvolvidos por ele dentre inúmeras descobertas realizadas nesta área. Este estudo teve uma abordagem bibliográfica e qualitativa, tendo como prioridade determinar algumas expressões desenvolvidas por Euler que são consideradas, até hoje, como as mais importantes para a matemática, devido suas aplicabilidade e magnitude. Neste texto foi relatado uma de suas grandes contribuições para a Geometria que leva o seu nome, a Relação de Euler, sendo apresentada uma demonstração para esta famosa descoberta. Apresenta também a função ϕ de Euler e o Teorema de Euler relacionado a congruência módulo m , que é uma aplicação da função ϕ de Euler. Há um breve relato de uma famosa descoberta de Euler que mostrou que a fórmula para encontrar primos desenvolvida por Pierre de Fermat (1601-1665) não era verdadeira, mostrando uma fatoração para o número $2^{2^5} + 1$. Espera-se que o texto mostre a genialidade deste fabuloso matemático.

Palavras-chave: Leonhard Euler. Relação de Euler. ϕ de Euler. Teorema de Euler. Números de Fermat.

Introdução

Quando falamos de docência a primeira ideia que temos está ligada a prática em sala de aula. No entanto, como se pode alcançar uma boa prática sem melhorias na parte específica à área de atuação do professor e as teorias que rodeiam sua profissão?

D'Ambrósio (1986), faz uma reflexão sobre a relação entre a teoria e a prática em sala de aula, ressaltando sua indissociabilidade. Desta forma, pode-se acreditar que não existe uma aula perfeita somente com prática ou apenas com teoria, cabendo ao professor fazer esta união. Mas, como ser capaz de fazer tal junção sem ter conhecimento do conteúdo que ensina? Cunha (1992) afirma que um bom professor deve conhecer com certo domínio e rigor os conteúdos que fazem parte da sua formação e a pesquisa é uma ferramenta fundamental para que isso ocorra.

A pesquisa que está relatada neste texto trata das contribuições de Leonhard Euler (1707-1783) para a matemática, ressaltando alguns aspectos históricos e alguns resultados desenvolvidos e demonstrados por ele relativos a

¹ ricardojreige@yahoo.com.br (PQ).

Geometria e Aritmética. É importante ressaltar que ele fez descobertas em várias outros campos da Matemática, como o desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Este estudo foi baseado em uma abordagem bibliográfica e qualitativa, tendo como *priori* determinar algumas expressões desenvolvidas por Euler que são consideradas, até hoje, como as mais importantes para a matemática, devido suas aplicabilidade e magnitude. A fundamentação foi baseada em ÁVILA (2010), BOYER e MERZBACH (2012), D'AMBRÓSIO (2009), DOLCE e POMPEO (1993), HEFEZ (2011) e LIMA (2006).

Neste texto está relatado uma de suas grandes contribuições para a Geometria que leva o seu nome, a Relação de Euler, que afirma que em qualquer poliedro convexo ou não convexo (desde que seja euleriano) a soma da quantidade de vértices e faces é igual à soma da quantidade de arestas e dois. Foi apresentada uma demonstração para esta famosa descoberta.

Foi também apresentado a função ϕ de Euler e o Teorema de Euler relacionado a congruência módulo m , que é uma aplicação da função ϕ de Euler. Há também uma demonstração destes dois resultados advindos da genialidade de Euler.

Há um breve relato de uma famosa descoberta de Euler que mostrou que a fórmula para encontrar primos desenvolvida por Pierre de Fermat (1601-1665) não era verdadeira.

Euler fez descobertas extraordinárias que são assunto de discussão em grupos de estudo de Matemática até hoje. Não sabemos de onde vem sua genialidade, mas seus feitos ficaram registrados na história e servem de elo entre o passado e o futuro.

Material e Métodos

A natureza da pesquisa em Matemática foi aplicada, tendo sido utilizada uma abordagem qualitativa, uma vez que o objeto está sendo analisado do aspecto global para os casos particulares, através de identificação, análise e demonstrações de alguns resultados de Euler.

A pesquisa está sendo realizada sob um aspecto exploratório, pois o problema está sendo analisado de forma que contribua com o desenvolvimento da docência no que se refere ao acréscimo do conhecimento em Geometria e

Aritmética, tornando as demonstrações mais explícitas. Mantem-se o procedimento feito através de uma pesquisa bibliográfica específica ao objeto de estudo, utilizando material já publicado, constituído de livros, artigos de periódicos, dissertações de mestrado, teses de doutorado e de informações disponibilizadas na Internet, atualmente, encontradas em bibliotecas virtuais.

A pesquisa proporciona um aperfeiçoamento intelectual acerca dos conceitos que envolvem as contribuições de Euler que são relevantes para a disciplina de Matemática, proporcionando um conhecimento rico e de grande importância para melhoria das aulas.

A pesquisa foi dividida em duas etapas: a primeira relacionada à busca das primeiras referências para que fossem coletadas informações teóricas importantes para o desenvolvimento do estudo. A segunda destinada a elaboração, análise e escrita de textos e/ou artigos detalhando os resultados de Euler e, quando possível, suas demonstrações.

Resultados e Discussão

A pesquisa foi realizada através de estudos de obras que tratam das contribuições de Euler para a matemática. No artigo elaborado por D'Ambrosio (2008) está descrito de forma detalhada a história de Euler, enumerando seu desenvolvimento intelectual e profissional no decorrer de sua vida. A forma como foi escrita nos instiga a analisar seus resultados e a forma como abordava cada uma delas.

A princípio fez-se um estudo sobre a gênese de Leonhard Euler que, segundo Ávila (2010), teve seu nascimento em 15/04/1707 em Basileia, na Suíça, falecendo em 18/09/1783 em São Petersburgo, na Rússia. Euler já mostrava sua genialidade desde jovem, possuindo uma fabulosa memória e grande aptidão para aprender outras línguas. Filho de pastor protestante rígido que o persuadia a seguir o mesmo caminho estudando teologia. Leonhard seguiu aos caprichos de seu pai até ingressar na universidade onde iniciou estudos voltados à carreira religiosa.

Um fato importante para o desenvolvimento intelectual de Euler pode estar relacionado ao período em que ele vivenciou. Segundo Ávila (2010), era uma época de intenso desenvolvimento das atividades científicas e, embora houvesse muitas contribuições de Newton (1645 – 1727) e de Leibniz (1646 – 1716) o Cálculo era

ainda muito novo e aguardava o desenvolvimento de seus métodos. Estes seriam, em sua maioria, realizados por Euler.

Na universidade de Basileia, enquanto Euler ainda era acadêmico, ele conhece Jean Bernoulli (1667 – 1748), matemático de renome que o incentiva nos estudos. Bernoulli observa uma genialidade em Euler e reconhece que estava sendo ultrapassado pelo jovem aluno.

Segundo Boyer e Merzbach (2012), por indicação de Bernoulli, Euler foi convidado a fazer parte, como membro, da seção de medicina e filosofia. Em 1730, após a morte de seu pai, Euler passa a ocupar a cadeira de filosofia natural. Em 1733, Euler passa a ser o principal matemático da Academia de S. Petersburgo. Ele podia fazer cálculos sem esforço aparente. Em 1735, perde a visão do olho direito, mas não o impede de produzir inúmeros artigos de matemática. Segundo D'Ambrósio (2008), Euler pode ter sido o matemático que mais produziu em toda a história e dentre algumas contribuições que ele proporcionou para evolução da matemática que conhecemos estão na geometria, no cálculo infinitesimal, na trigonometria, na álgebra e na teoria dos números, dentre outras.

No decorrer desta pesquisa foi observado que a análise de suas contribuições é um estudo constante que necessita de um tempo de investigação muito maior que se pensava no início da pesquisa. Porém, neste texto serão abordadas duas de suas contribuições, uma em Geometria outra em Aritmética.

A primeira contribuição trata da relação que leva seu nome, ou seja, Relação de Euler que afirma que em todo poliedro euleriano temos:

$$V + F = A + 2,$$

onde V é o número de vértices, F é o número de faces e A é o número de arestas do poliedro.

Primeiramente, vamos definir o que é um poliedro. Segundo Lima et. al. (2006), é uma união de um número n de polígonos planos, em que cada lado destes também é lado de um outro polígono. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado comum a exatamente duas faces, é chamado de aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra cruzando apenas arestas.

Os poliedros podem ser convexos ou não convexos, como se pretende mostrar a Relação de Euler é importante que se entenda a ideia de um poliedro convexo, já que existem poliedros não convexos que não satisfazem a relação.

Dolce e Pompeo (1993, p.124), define poliedros convexos como sendo:

Consideremos um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

- a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
- b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A intersecção desses semi-espaços é chamado poliedro convexo.

Observe, na Figura 1, a representação de um poliedro convexo e um não convexo seguindo a definição acima:

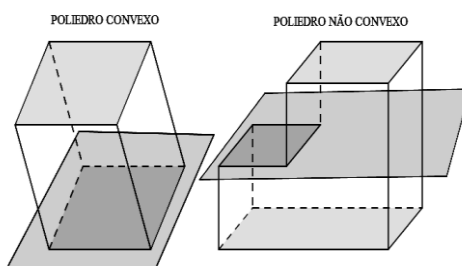


Figura 1 Poliedros Convexos e Não Convexos

Segundo Lima et. al. (2006), as faces podem ser formadas por polígonos diferentes quanto ao número de lados. Logo, será representado por F_n ($n \geq 3$) o número de faces que possuem n lados. Analogamente, V_n será o número de vértices que concorrem n arestas. Como cada vértice do poliedro é ponto comum de três ou mais arestas é possível deduzir que

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_n$$

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \dots + V_n$$

Como as faces que formam os poliedros podem ser diferentes, pode-se entender que podem possuir um número de arestas diferentes em cada uma delas. Desta forma, para contar o número de aresta é necessário multiplicar o número de faces triangulares por 3, o número de faces quadrangulares por 4, o número de faces pentagonais por 5 e assim sucessivamente; em seguida, somamos os resultados. Como cada aresta é comum a exatamente duas faces cada uma delas será contada duas vezes. Assim, o número de arestas de qualquer poliedro pode ser representado por

$$A = \frac{1}{2} \cdot (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n).$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} 2A &= 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n \\ &= 3 \cdot (F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_n) + F_4 + 2F_5 + \dots + (n-3)F_n \\ &= 3F + F_4 + 2F_5 + \dots + (n-3)F_n \geq 3F. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos deduzir o número de arestas de um poliedro através de seus vértices, já que estes são formados pelo encontro de três ou mais arestas. Assim, teremos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots + nV).$$

Ou ainda,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots + nV_n \geq 3V.$$

Observe que a igualdade $2A = 3F$ somente é verdadeira se o poliedro possuir apenas faces triangulares e, neste caso, teremos $F_4 + F_5 + F_6 + \dots + F_n = 0$, com $n > 3$. Analogamente, a igualdade $2A = 3V$ somente é válida se em todos os vértice concorrerem apenas três arestas e, neste caso, teremos $V_4 + V_5 + V_6 + \dots + v_n = 0$, com $n > 3$.

Agora, enunciaremos o foco central desta seção ao teorema ou relação de Euler.

Segundo Dolce e Pompeo (1993, p.124), pode-se enunciar a Relação de Euler do seguinte modo: “Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação

$$V - A + F = 2,$$

em que V é o número de vértice, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro”.

A demonstração do Teorema de Euler segundo Dolce e Pompeo (1993) pode ser dividida em duas etapas. A primeira em caráter preliminar, será mostrado pelo Princípio de Indução Matemática (PIM) sobre F que, para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1,$$

onde V_a , A_a e F_a representam o número de vértices, aresta e faces da superfície poliédrica limitada aberta, respectivamente.

- Para $F_a = 1$.

Neste caso, trata-se de uma superfície única, ou seja, um polígono plano convexo de n lados. Logo, este ainda possui n vértices. Assim,

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1.$$

Portanto, a relação é válida para $F_a = 1$.

- Supondo que a relação seja válida para uma superfície de F' faces (onde V' é o número de vértices e A' o número de arestas), deve-se mostrar que também é válida para uma superfície que possui $F' + 1$ faces (que possui $F' + 1 = F_a$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Basta tomar uma superfície que possui F' faces, V' vértices e A' arestas. Por hipótese de indução segue que:

$$V' - A' + F' = 1.$$

Acrescentando-se uma face com r arestas a essa superfície (que é aberta) e considerando que s arestas coincidam com arestas já existentes, obtém-se uma nova superfície com F_a faces, V_a vértices e A_a arestas, de maneira que:

$$F_a = F' + 1$$

$$A_a = A' + r - s \quad (s \text{ arestas coincidiram})$$

$$V_a = V' + r - (s + 1) \quad (s \text{ arestas coincidindo, } s + 1 \text{ vértices coincidem})$$

Segue que

$$V_a - A_a + F_a = V' + r - (s + 1) - A' - r + s + F' + 1 = V' - A' + F' = 1.$$

A relação é válida para $F' + 1$ faces.

Portanto, pelo PIM a relação preliminar é válida.

Para segunda etapa tome uma superfície poliédrica limitada convexa e fechada (com F faces, V vértices e A arestas) e dela retira-se uma face. Para melhor visualização, observe a figura 2.

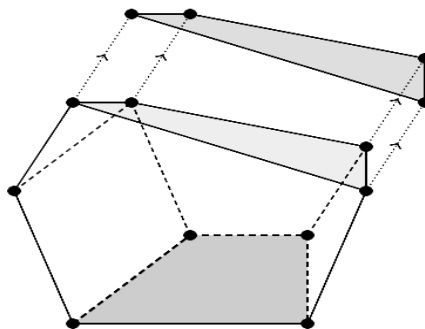


Figura 2 Poliedro retirando-se uma de suas faces

Veja que o poliedro ficará com uma superfície aberta (com F_a faces, V_a vértices e A_a arestas) à qual vale a relação $V_a - A_a + F_a = 1$. Mas, como na figura tem $F_a = F - 1$, $V_a = V$ e $A_a = A$. Segue destes dois resultados que

$$V - A + F - 1 = 1,$$

Ou seja, é o mesmo que

$$V - A + F = 2.$$

Concluindo a demonstração da famosa Relação de Euler.

Como já mencionado Euler fez muitas produções para a Matemática. A segunda contribuição proposta neste texto será relatada em duas de suas contribuições para a Aritmética: a função φ de Euler e o Teorema de Euler, fundamentado nos estudos de Hefez (2011).

Função φ de Euler: Define-se o número $\varphi(m)$, com $m \in \mathbb{N}$, por

$$\varphi(m) = \{r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq m - 1 \text{ e } (r, m) = 1\}.$$

Denomina-se função φ de Euler à função $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, com $m \rightarrow \varphi(m)$. Desta forma, pode-se entender que $\varphi(m)$ é a quantidade de números naturais do intervalo $[1, m - 1]$ que são primos com m .

Se m é um número natural primo então $\varphi(m) = m - 1$. De fato, se m é primo então, por definição, ele só possui dois divisores naturais, 1 e ele mesmo. Como $(1, m) = 1$, segue que $\varphi(m) = m - 1$, pois todos os outros números diferentes de 1 e menores que m são primos com m . Exemplos:

$$\varphi(3) = 2; \quad \varphi(7) = 6; \quad \varphi(7) = 6; \quad \varphi(9) = 6; \quad \varphi(12) = 4.$$

Teorema de Euler: Seja $a, m \in \mathbb{N}$, $(a, m) = 1$ e $m > 1$. Então,

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Sejam $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{\varphi(m)}$ todos os possíveis restos não nulos na divisão por m . Desta forma de $(a, m) = 1$, então $ar_1, ar_2, ar_3, \dots, ar_{\varphi(m)}$ também englobam todos os mesmos restos na divisão por m . Desta forma, pode-se representar a congruência

$$ar_1 \cdot ar_2 \cdot ar_3 \cdots ar_{\varphi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

O que equivale a

$$a^{\varphi(m)} r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_{\varphi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Nesta última congruência, pode-se usar o cancelamento de termos em ambos os lados da congruência, ou seja,

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Desta forma completa-se uma das demonstrações do Teorema de Euler.

É importante ressaltar que se p for primo teremos $\varphi(p) = p - 1$, o que resulta no Pequeno Teorema de Fermat, ou seja, dado $a, p \in \mathbb{N}$, $(a, p) = 1$ e p um número primo. Então,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Pierre de Fermat (1601-1665), matemático e cientista francês, enunciou um problema cuja solução até hoje é procurada pelos matemáticos, a determinação de um modelo matemático que gere números primos. Ele morreu convicto de que a expressão $2^{2^n} + 1$ que ele havia encontrado sempre geraria um número primo, porém admitiu não ser capaz de prova-la rigorosamente. Esta fórmula produz números primos para $n = 1, 2, 3$ e 4 . Porém, em 1732, Euler apresentou uma fatoração para o número $2^{2^5} + 1$:

$$n = 5 \Rightarrow F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6700417,$$

ou seja, é um número natural composto, mostrando que esta afirmação de Fermat estava errada para $n = 5$. Os números de Fermat são denominados *Primos de Fermat*.

Muitos fatos rondam a história de Euler, como é possível que um único homem tenha tantas contribuições para a matemática. Sua genialidade transcende a capacidade da mente humana, mostra a determinação e a inteligência que podemos alcançar. De tudo que foi dito (que é uma ínfima parte de suas obras), só resta acreditar que Euler era um homem extraordinário.

Considerações Finais

A busca por melhorias no conhecimento específico da área de atuação do professor é fundamental para o desenvolvimento de sua prática em sala de aula. Sendo assim, pode-se analisar esta pesquisa como um momento de reflexão da prática que ocorre na sala de aula e que pode ser aperfeiçoada.

O estudo das contribuições de Euler para a Matemática realizado até o momento, mostra o quão é importante conhecer as particularidades dos conceitos que são apresentados aos nossos alunos, suas origens e contextos em que foram concebidos. As discussões e as apresentações realizadas acerca do objeto de estudo mostraram a importância de Euler para o ensino de Matemática, uma vez que

a sua própria história é motivacional. O conhecimento adquirido será fundamental para melhoria das aulas que foram e que serão apresentadas aos acadêmicos, uma vez que o autor do projeto passa a analisar suas aulas com mais rigor.

Desta forma, pode-se concluir que esta pesquisa proporcionou uma ruptura no planejamento das aulas ministradas e um revigoramento na busca de novos conhecimentos que possam ampliar o conhecimento do docente de ensino superior. Além de constatar a extraordinária mente de um dos maiores matemáticos de todos os tempos, Leonhard Euler.

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa e filhos pelo apoio prestado, a Universidade Estadual de Goiás – Câmpus Jussara que colaborou com os materiais utilizados na realização desta pesquisa e ao professor Miguel Antônio de Camargo por auxiliar em meus estudos.

Referências

ÁVILA, Geraldo. *Várias faces da Matemática: Tópicos para licenciatura e leitura em geral*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CUNHA, Maria Isabel da. **O bom professor e sua prática**. 2 ed. São Paulo: Papirus, 1992.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: Reflexões sobre Educação e Matemática. 5 ed. Campinas, SP: Summus, 1986.

_____. Euler, um Matemático Multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática, vol. 9, nº 17, p. 13-31, abril/setembro, 2009.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Geometria espacial, posição e métrica. 5 ed., v. 10, São Paulo: Atual, 1993.

HEFEZ, Abramo. *Elementos da Aritmética*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. (Coleção do Professor de Matemática)

LIMA, Elon Lages; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 6 ed. v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 372 p. (Coleção do Professor de Matemática)