MODELAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES À ECONOMIA

PAULO, João Pedro Antunes de
Universidade Estadual de Goiás – UnU de Iporá
jpadepaula@hotmail.com

RESUMO

Esta pesquisa foi feita através do levantamento bibliográfico do tema. A modelagem matemática tem grande importância na popularização do conhecimento científico, pois através de seus métodos é possível aplicar todos os conhecimentos teóricos as necessidades práticas da população. Este trabalho tem por objetivo investigar a aplicabilidade das equações diferenciais em problemas econômicos, visando contribuir ao desenvolvimento dos estudos das equações diferenciais e principalmente ao aprofundamento dos estudos em modelagem econômica. A pesquisa fundamenta-se principalmente nos conceitos apresentados por Boyce e DiPrima em seu livro publicado em 2006. Realizou-se uma pesquisa qualitativa desenvolvida através de levantamento bibliográfico nas obras destes autores e de outros autores que se relacionam com o tema. Os sujeitos da pesquisa foram as equações diferenciais de primeira ordem e os modelos econômicos nos quais estas equações podem ser aplicadas. Pode-se perceber que estas possíveis aplicações foram encontradas e que a utilização das equações facilitou o processo de busca da solução. Acredita-se que a principal contribuição desta pesquisa constitui-se em mostrar que é possível, através da modelagem matemática, aplicar os conceitos de equações diferenciais de primeira ordem em questões envolvendo o mercado econômico. Porém o pesquisador deve perceber a singularidade de cada situação e basear suas propostas nos conceitos formados.

Palavras-chave: Equações diferenciais; Modelo matemático; Modelo econômico.

INTRODUÇÃO

A problemática em que se inseriu esta pesquisa é ampla, ela buscava analisar os diferentes formar de se aplicar as equações diferenciais no mercado econômico, no sentido de resolver este questionamento a modelagem matemática apóia os pesquisadores na popularização dos conhecimentos, pois conforme Boyce (2006) as possíveis aplicações de um conceito é que o faz valer à pena.

Como ponto de partida para a situação proposta decidiu-se adotar a definição básica do conceito de modelagem matemática, pois se acredita que ao partir da realidade concreta vivenciada pelos pesquisadores a inserção dos conceitos científicos seria facilitada quando percebido por estes que na verdade os conceitos surgem espontaneamente na evolução dos problemas.

O objetivo geral desta pesquisa foi investigar a existência de aplicações das equações diferenciais ligadas ao mercado econômico.

Os objetivos específicos foram: Identificar através da modelagem as equações diferenciais em problemas práticos; Definir as equações diferenciais de primeira ordem e principalmente buscar por possíveis aplicações das equações diferenciais de primeira ordem no mercado econômico.

O que motivou essa pesquisa foi à busca por uma aplicação das equações diferenciais de primeira ordem afim de que estas aplicações servissem de meio motivador a obtenção de conhecimentos teóricos por aqueles que estão envolvidos no mercado financeiro.

Nesta pesquisa, foram feitas análise de opiniões de autores que trabalharam o tema anteriormente e posteriormente foi feita a aplicações destas idéias para resolução do problema proposto, este método enriquece o trabalho pois mostra diferentes pontos de vista sobre um mesmo objeto.

Para o levantamento das diferentes opiniões dos diversos autores citados no trabalho foi realizado um fichamento dos principais autores contemporâneos e posteriormente a leitura e interpretação de suas obras afim de refinar nosso trabalho e transmitir de forma sucinta seus ponto de vista.

Ao mostrar os diferentes pontos de vistas de diferentes autores sobre o tema e encontrar a solução para o problema inicialmente proposto, esta pesquisa vem contribuir como um fonte de exploração a respeito do tema, demonstrando de forma clara e objetiva que a resposta as questões proposta existe e é positiva o principal papel dos resultados desta pesquisa é propor um método facilitador para os cálculos envolvendo as grandezas econômicas.

MATERIAL E MÉTODOS

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, especificamente na modelagem matemática no campo das equações diferenciais. Tal abordagem apoiou-se em autores da área que propõem de modo sucinto o trabalho com este tema, tais como Boyce (2006) e Veras (2009). A pesquisa realizou-se mediante o processo de pesquisa bibliográfica desenvolvendo-se por meio de fichamento de autores, levantamento de referências e posterior análise de dados.

O uso da pesquisa bibliográfica, como apresenta Appolinário (2012), permite ao pesquisador apresentar o que autores importantes da área publicaram sobre o tema, além de permitir uma maior contextualização por meio de recursos como as citações.

Assim, o levantamento bibliográfico, nesta pesquisa, foi baseado nos autores acima citados e consistiu em uma análise de suas opiniões e posterior aplicações destas idéias para resolução do problema proposto.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

Para iniciar este trabalho buscou-se uma situação econômica hipotética encontrada em (BOYCE, 2006), vamos supor que determinada quantidade de dinheiro seja aplicada em um fundo de investimento que para juros compostos, é evidente que o valor total do investimento a qualquer momento depende do valor inicialmente aplicado e a frequência que os juros serão incidentes. Para descobrirmos o valor do montante aplicado em determinado momento utilizaremos um modelo matemático que segundo (BOYCE, 2006) consiste em descrever um processo físico através de uma expressão matemática.

Segundo (VERAS, 2009) a soma do capital inicial mais os juros do período resultam em um somatório que recebe o nome de montante. Determinando como j os juros pagos pelo investimento, t como o período no qual o dinheiro está aplicado e c_0 como o capital inicialmente aplicado, pode-se escrever a expressão que define o montante M no primeiro período de aplicação da seguinte forma:

$$j = c_0 . i$$

Então

$$M_1 = c_0 + j$$

$$M_1 = c_0 + c_0 . i$$

$$M_1 = c_0 . (1 + i)$$

No segundo período de aplicação o montante será igual a:

$$M_2 = M_1 + M_1 . i$$

$$M_2 = M_1 .(1 + I)$$

$$M_2 = [c_0(1+i)].(1+i)$$
$$M_2 = c_0.(1+i)^2$$

Para o terceiro período:

$$M_3 = M_2 + M_2.i$$
$$M_3 = c_0.(1+i)^3$$

Agindo desta mesma forma define-se o montante no t-ésimo período como:

$$M_t = c_0.(1+i)^t \tag{1}$$

Portanto a expressão (1) fornece o montante referente a um capital aplicado por t períodos.

Observa-se que se os juros forem calculados duas vezes ao período, sendo assim após metade do período o montante seria:

$$M_{\frac{t}{2}} = c_0.(1+\frac{i}{2})$$

E ao final do período completo tem-se:

$$M_t = M_{\frac{t}{2}}.(1+\frac{i}{2})$$
$$M_t = M_{\frac{t}{2}} + M_{\frac{t}{2}}.\frac{i}{2}$$
$$M_t = c_0.\left(1+\frac{i}{2}\right).\left(1+\frac{i}{2}\right)$$
$$M_t = c_0.(1+\frac{i}{2})^2$$

Continuando a análise após um período e meio, o montante da aplicação será:

$$M_{\frac{3t}{2}} = M_t.M_t.\frac{i}{2}$$
$$M_{\frac{3t}{2}} = c_0.(1+\frac{i}{2})^2 + c_0.(1+\frac{i}{2})^2.\frac{i}{2}$$
$$M_{\frac{3t}{2}} = c_0.(1+\frac{i}{2})^3$$

De modo análogo após o t-ésimo período se os juros forem computados duas vezes ao período, tem-se:

$$M_t = c_0.(1+\frac{i}{2})^{2t}$$

Analogamente se os juros forem calculados n no período o montante final será:

$$M_t = c_0 . (1 + \frac{i}{m})^{mt} \qquad (2)$$

E se estes juros forem calculados continuamente em apenas um período o montante será dado pela expressão:

$$M_t = \lim_{m \to \infty} c_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

Calculando o limite tem-se:

$$M_t = c_0 \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{i}{m})^{mt}$$

$$M_t = c_0 . e^{it}$$

Então vê-se que quando os juros são calculados continuamente a variação instantânea do capital em relação ao período é proporcional ao capital, na forma de uma expressão tem-se:

$$\frac{dc}{dt} = ic \qquad (3)$$

A expressão (4) é um exemplo de equação diferencial de primeira ordem, que segundo Boyce (2006)

> Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressos em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais.(BOYCE, 2006, p. 1)

Uma equação diferencial é dita ordinária segundo Boyce (2006, p. 11) quando “aparecem na equação diferencial apenas derivadas simples”, Boyce (2006) nos define ainda equações diferenciais lineares como sendo aquelas em que a função f é linear a suas variáveis de modo análogo existem as equações não-lineares que são aquelas que não possuem linearidade com suas variáveis.

Como definido anteriormente as equações diferenciais lineares são aquelas que possuem linearidade com suas variáveis, percebe-se, por exemplo, a equação geral $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, se a função f depende da variável y ela é uma equação linear de primeira ordem.

Como método de resolução de uma equação linear de primeira ordem Boyce (2006) descreve o método do fator integrante:

> O método é devido a Leibniz; ele envolve multiplicar a equação diferencial por uma determinada função μ_t escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. A função μ_t é chamada fator integrante, e a maior dificuldade do método é saber como encontrá-la. (BOYCE, 2006, p. 20)

Anteriormente definimos uma equação diferencial como sendo da forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, considerando agora a função f independente da variável y a equação assume a forma, $\frac{dy}{dx} = f(x)$, que também é uma equação diferencial e pode ser resolvida por meio da integração simples.

Segundo Zill (2001, p. 52) este é um "caso especial de quando f em $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ é produto de uma função de x por uma função de y". Este caso especial das equações diferenciais recebe o nome de equações separáveis, pois segundo (BOYCE, 2006), podem ser escritos da forma:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

A solução geral neste caso especial é encontrada segundo (ZILL, 2001) integrando ambas as funções em relação as suas próprias variáveis

As equações exatas se caracterizam como outro caso de equações diferenciais, no item anterior definiu-se que as equações da forma $M(x)dx + N(y)dy = 0$ podem ser resolvidas através do método de integração simples e são caracterizadas como equações separáveis.

Agora seja visto o grupo de equações da seguinte forma,

$$N(y)dx + M(x)dy = 0 \tag{1}$$

que embora também sejam equações separáveis pode-se resolve-las de outra forma. A equação (1) é uma equação exata quando,

$$My(x,y) = Nx(x,y)$$

segundo Boyce (2006, p. 52) "$M(x,y) + N(x,y).y' = 0$ é uma equação diferencial exata em R se, e somente se, $My(x,y) = Nx(x,y)$ em cada ponto de R. Isto é, existe uma função φ satisfazendo as seguintes equações

$$\varphi_x(x,y) = M(x,y);\ \varphi_y(x,y) = N(x,y)."$$

Então uma equação separável que possua as derivadas de suas funções M_x e N_y iguais receberá o nome de equação diferencial exata

Retornando ao problema proposto no início desta seção, determinar a quantidade de dinheiro aplicada em um fundo de investimento que paga juros compostos, vimos que a expressão matemática que serve de modelo para este problema é uma equação diferencial de primeira ordem e é da seguinte forma:

$$\frac{dc}{dt} = ic$$

A partir da equação $\frac{dc}{dt} = ic$ e supondo que os saques e depósitos representam uma constante k a expressão anterior pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{dc}{dt} = ic + k$$

ou

$$\frac{dc}{dt} - ic = k \qquad (1)$$

Fazendo k positivo para depósitos e negativo para saques a equação anterior, de acordo com as definições de equações diferenciais vistas, se trata de uma equação diferencial linear e para sua resolução vamos calcular seu fator integrante:

Identificando $P(x)$ e $f(x)$

$$P(x) = -ic \qquad f(x) = k$$

$$\mu(t) = e^{-it} \qquad (2)$$

Multiplicando a equação (1) pela (2)

$$e^{-it}\frac{dc}{dt} - e^{-it}.ic = e^{-it}k$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-it}.c\right) = e^{-it}k \qquad (3)$$

Calculando a integral da equação (3)

$$\int \left(e^{-it}.c\right)\frac{d}{dt} = k\int e^{-it}\frac{d}{dt}$$

$$C(t) = c_1.e^{it} - \frac{k}{i} \qquad (4)$$

Calculando a $C(0)$ da equação (4) tem-se:

$$C(0) = c_1.e^{i.0} - \frac{k}{i}$$

$$C_1 = C_0 + \frac{k}{i} \qquad (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (4)

$$C_t = \left(C_0 + \frac{k}{i}\right).e^{it} - \frac{k}{i}$$

$$C_t = C_0.e^{it} + \left(\frac{k}{i}\right).(e^{it} - 1) \qquad (6)$$

Portanto, as equações diferencias nos permite escrever uma formula que generaliza os cálculos de juros compostos continuamente. Esta se caracteriza como uma aplicação das equações diferenciais lineares na economia, tem-se um exemplo extraído de (BOYCE, 2006) para verificar a eficiência desta aplicação.

> Suponha que uma pessoa abre uma conta para complementar sua aposentadoria com 25 anos e faz investimentos anuais de R$ 2.000,00 daí para frente de modo continuo. Supondo uma taxa de rendimento de 8% ao ano, qual será o saldo na conta quando a pessoa tiver 65 anos? (BOYCE, 2006 p.31)

Tem-se então neste problema que o capital inicial ou $C_0 = 0$, a taxa de rendimento $i = 0{,}08$ e o valor constante de depósito $k = 2000$ e o que se procura é o C_{40}, pois é a diferença entre a idade atual e a idade de planejamento para a aposentadoria. Substituindo estes valores na equação (6), obtêm:

$$C_{40} = 0.e^{0{,}08.40} + \left(\frac{2000}{0{,}08}\right).(e^{0{,}08.40} - 1)$$

$$C_{40} = 25000.(e^{3{,}2} - 1)$$

$$C_{40} = 588.313{,}25$$

Portanto o capital acumulado durante 40 anos de aplicação é de $R\$\ 588.313{,}25$, sendo que $R\$\ 80.000{,}00$ deste total refere-se a depósitos e os $R\$\ 508.313{,}25$ restantes aos rendimentos do período.

Outro exemplo da aplicação das equações diferenciais na economia é o calculo da elasticidade seja do produto, do preço ou da demanda. Segundo Cotta (2005, p.4) a elasticidade é “a razão entre a variação relativa da variável dependente y e a variação relativa da variável independente x”, o calculo da elasticidade-demanda é feito a partir do cociente da variação do percentual da quantidade da demanda pela variação do percentual do preço.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabe-se que são várias as aplicações das equações diferenciais na economia. Assim nesta pesquisa buscamos organizar os conceitos e aplicabilidades de forma as servir de embasamento básico para pesquisas mais avançadas.

Acreditamos que ao contribuir com a formação de conceitos básicos nos interessados por pesquisas nesta área eles possam compreender de forma sucinta os primeiros passos e serem capazes de interiorizar conceitos mais avançados.

Sabemos que este se trata de um trabalho básico e que ainda há muitos conceitos que não foram abordados, porém percebemos que os temas aqui abordados contribui em grande parte das demais áreas a serem pesquisadas. Assim as teorias aqui discutidas poderão ser levadas adiante e aprimoradas.

Portanto, a principal contribuição da pesquisa, constituiu em mostrar que é possível aplicar as equações diferencias na economia e acreditamos que estas venham facilitar o trabalho em grande parte das situações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APPOLINÁRIO, Fábio. **Metodologia da ciência: Filosofia e prática da pesquisa/** Fábio Appolinário. – 2. Ed. – São Paulo : Cengage Learning, 2012.

BOYCE, Willian E., **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**/ Willian E Boyce, Richard C DiPrima ; tradução de Baléria de Magalhães Iorio. – Rio de Janeiro : LTC, 2006.

COTTA, José Lásaro. **Elasticidade – Demanda e preço.** Especialização em Matemática para professores. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2005.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática financeira: uso de calculadoras financeiras, aplicações ao mercado financeiro, introdução à engenharia econômica, 300 exercícios resolvidos e propostos com resposta** / Lilia Ladeira Veras. – 6. Ed. – 3. Reimpr. – São Paulo : Atlas, 2009.

ZILL, Denoris. **Equações diferenciais**/ Denoris Zill. – 3. Ed. – São Paulo: Makron Books, 2001.