VARIEDADE DAS DIMENSÕES

Heides Lima de Santana[1], Ernesto Seiji Matsumoto[2], Adriana de Oliveira Dias[3]

1. Graduando do curso de Licenciatura em Matemática, 4º ano. UEG – Unidade Santa Helena de Goiás. Via Protestato Joaquim Bueno, 945 – Perímetro Urbano.75920-000, Santa Helena de Goiás, GO. Email: heides_hl3@hotmail.com
2. Graduando do curso de Licenciatura em Matemática, 2º ano. UEG – Unidade Santa Helena de Goiás. Via Protestato Joaquim Bueno, 945 – Perímetro Urbano.75920-000, Santa Helena de Goiás, GO.
3. Licenciada em Matemática e Mestre em Matemática Aplicada. Professora de Ensino Superior. UEG – Unidade Santa Helena de Goiás. Via Protestato Joaquim Bueno, 945 – Perímetro Urbano. CEP. 75920-000, Santa Helena de Goiás, GO.

Resumo: Vivemos em três dimensões, porém nem tudo que nos cerca possui três dimensões, alguns objetos, ou formas da natureza, não possuem dimensão inteira. Um cubo possui dimensão três e se tiramos uma pequena parte desse cubo ele ainda continuará com dimensão três. Esses casos levaram os matemáticos a definirem maneiras diferentes de calcular dimensões. Algumas dessas dimensões são a dimensão de Hausdorff e a topológica. A dimensão de Hausdorff mostra que alguns objetos possuem dimensão fracionária e a dimensão topológica mostra o quanto uma forma ocupa um espaço.

Palavra Chave: Dimensões matemáticas, Fractal, Topologia.

INTRODUÇÃO

A dimensão euclidiana representa o número de coordenadas necessárias para descrever as formas existentes, uma reta está em uma dimensão 1D (comprimento), um plano está em duas dimensões 2D (comprimento e largura), um cubo está em três 3D (comprimento, largura e altura). Quando se fala de 4D, em física, está incluso o tempo, ou seja, o tempo e o espaço formam a quarta dimensão. Tente imaginar, em um plano cartesiano, um quarto eixo que passe pela origem e seja perpendicular aos três eixos já desenhados (X, Y e Z). Por mais que você procure, não vai encontrar. Não há lugar para ele, ou, melhor dizendo, não há "espaço" para ele**.** Essa é uma ideia da impossível quarta dimensão. Há quem afirme que não estaríamos apenas incapacitados de imaginar objetos com quatro ou mais dimensões porque nunca os vimos antes?

Uma reta de 1D se, ao acaso, colocada em um microscópio iríamos ainda enxergar a mesma espessura? A reta tem a finura zero e só tem comprimento, se quisermos medir um quadrado com retas seria possível? Não, pois a reta não tem largura, somente comprimento. Seja uma folha de papel que tem 2D, ao amassarmos essa folha até virar uma bolinha de papel ela saltou da dimensão 2 para a 3. A folha tinha comprimento e largura e transformou-se em uma bolinha que tem comprimento, largura e altura.

Observe que se retirarmos $1/4$ de um círculo consegue-se construir um cone sem a base. Portanto, um objeto de 2D passa a ser 3D, como mostra a figura 1.

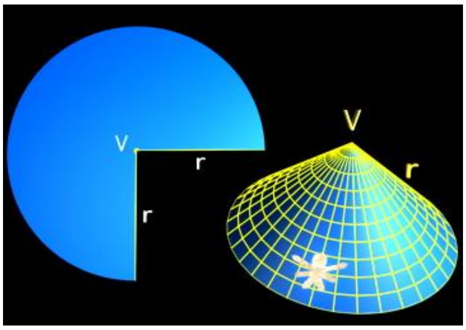


Figura 1: Um cone formado por uma parte de um círculo.
Fonte: http://www.silvestre.eng.br/astronomia/artigos/bigbang

Os casos citados acima, relacionados à geometria euclidiana, fizeram alguns matemáticos se indagarem se havia uma maneira de calcular as dimensões de um jeito diferente, em destaque a dimensão de Hausdorff e a dimensão topológica.

É possível calcular a dimensão dos objetos auto-semelhantes, como os fractais, através da Dimensão de Hausdorff, (JANOS, 2008, p.6). Os fractais são figuras ou formas da natureza caracterizadas por complexidade infinita, auto-semelhança, formas caóticas e dimensão fracionária. Um exemplo é a curva de Koch na figura 2. A Geometria fractal foi desenvolvida por Benoit Mandelbrot (1924) que necessitou dos conceitos da dimensão de Hausdorff[1].

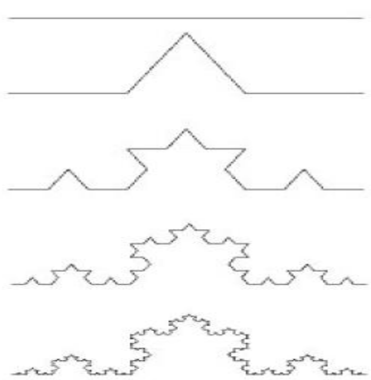


Figura 2: Curva de Koch

Fonte: (NUNES, 2006, p. 5)

A Curva de Koch é desenvolvida a partir de um segmento de reta. Neste caso o segmento é dividido em partes iguais e inicia-se uma iteração em uma das partes divididas. Observe que o processo é feito indefinidamente. Não obstante, observe que a Curva de Koch tem uma semelhança com a costa marítima e uma nuvem.

> De acordo com Riemann, a dimensão matemática não necessita de se referir somente a espaços sensíveis; pode, com toda a lógica, referir-se a espaços puramente conceituais; a que Riemann chamou "variedades".

---

[1] Felix Hausdorff (1868 - 1942), matemático alemão que contribuiu, com seus trabalhos, no desenvolvimento da topologia e da geometria fractal.

> Ao dar este imaginativo salto para a abstração, Riemann libertou a geometria, ainda mais do que o fizera Descartes, da dependência euclidiana das noções físicas de comprimento, largura e altura. (GUILLEN, 2000, p. 95)

DIMENSÃO HAUSDORFF – BESICOVICH

A ideia de dimensão não inteira aplicada a formas descontínuas surgiu com o matemático Hausdorff por volta de 1919 onde mais tarde foi mais aperfeiçoada por Besicovich (STAHLKE, 1993, p. 33).

Seja uma reta qualquer, se a dividirmos em n partes iguais teremos que cada parte da mesma equivale a $1/n$. Em um quadrado, dividindo-o em n partes iguais teremos que cada parte equivale a $1/n^2$. No caso de um cubo, teríamos, na mesma divisão $1/n^3$ partes. Onde designamos por N o número de partes e por n o coeficiente de redução (ou construção), como afirma (ASSIS, 2008, p. 4). Logo a dimensão é dada por

$$N = \frac{1}{n^d} = \left(\frac{1}{n}\right)^d \Rightarrow \ln N = \ln\left(\frac{1}{n}\right)^d \Rightarrow \quad d = \frac{\ln N}{\ln n^{-1}}.$$

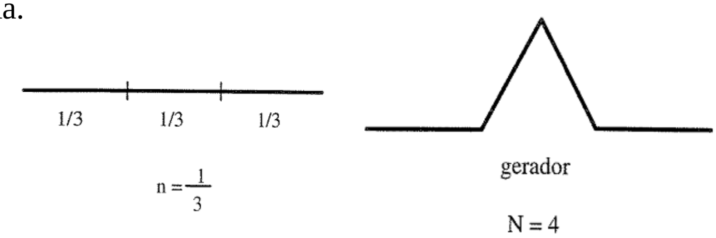
DIMENSÃO TOPOLÓGICA

A ideia da dimensão topológica consiste em encontrar o menor número de interseções de bolas, com raio suficientemente pequeno, necessárias para cobrir todas as partes dos objetos (NUNES, 2006, p.38).

Cobertura de um conjunto X é uma coleção $A = \{D_1, \dots, D_n\}$ de bolas abertas tais que a sua união cobre X. Uma cobertura aberta $B = \{D'_1, \dots, D'_m\}$ com $m > n$ é um refinamento de A se para cada D'_i existir D_i tal que $D'_i \subset D_i$. Os inteiros m e n são chamados de ordem das respectivas coberturas A e B. Seja X um conjunto pertencente a $\mathbb{R}^n$. Então a $dim\, X \leq n$, desde que qualquer cobertura aberta finita tenha um refinamento aberto finito de ordem menor ou igual a $n + 1$. No entanto, a $dim\, X \leq n$, em outras palavras, esta condição significa que existe uma cobertura aberta finita de X tal que todos os refinamentos abertos finitos têm ordem $\leq\ n + 1$.

RESULTADOS

Usando a dimensão de Hausdoff observe que a curva de Koch possui dimensão fracionária.



Então temos $D = -\frac{\ln 4}{\ln 3^{-1}} = 1{,}26$.

Observe que a dimensão da curva de Koch é 1,26. Não obstante, a curva de Koch é parecida com a costa de um país e uma nuvem então podemos afirmar que a dimensão da forma de uma nuvem é aproximadamente 1,3.

Um outro farctal que podemos calcular a dimensão é o Conjunto de Cantor, que também é conhecido como Poeira de Cantor e é um fractal que possui muitas propriedades interessantes. É formado por um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário [0,1]. A dimensão do conjunto de Cantor é: $D = -\frac{\ln 2}{\ln 3^{-1}} = 0{,}63$.

O conjunto de pontos isolados pode ser coberto por bolas de raio suficientemente pequeno de modo que não haja nenhuma interseção entre elas, portanto a sua dimensão topológica é zero, logo o conjunto de Cantor tem dimensão topológica igual a zero. No caso de uma curva que pode ser coberta com discos abertos onde não haja tripletos, apenas pares de discos abertos não disjuntos, portanto a dimensão da curva é 1.

Para finalizar a compreensão sobre essa dimensão observe que para uma reta temos que $m = l^1$ assim a dimensão da reta é 1, um quadrado tem $m = l^2$ que a dimensão é 2 e o volume de um cubo $m = l^3$ que possui dimensão 3.

Outro fractal que podemos calcular a dimensão é o Tapete de Sierpinski. Observe, na figura 3, que $N = 8$ e e que $r = 1/3$, logo, $d = \ln 8 / \ln 3 = 1{,}89$.

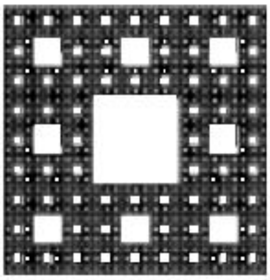


Figura 3: Tapete de Sierpinski.
Fonte: (NUNES, 2006, p. 5)

Na topologia a dimensão é 2. Se não for retirado nada do tapete observe que teríamos $d = \ln A \,/ \ln \frac{1}{\frac{1}{l}}$, $A = l^2$, então $d = \ln l^2 \,/ \ln l = 2$.

CONCLUSÃO

Existem vários estudos sobre como calcular as dimensões dos objetos, por exemplo, dimensão de raio-massa, dimensão por imagem, dimensões da contagem de caixas, dimensão espectral entre outras.

O significado de dizer que um objeto possui dimensão entre 1 e 2 é que esse valor é a forma com que medimos um objeto. Como exemplo uma linha só pode ser medida em uma dimensão e um cubo em três. A dimensão topológica leva em consideração a forma que um conjunto ocupa um espaço. Percebe-se, com isso, que o conjunto de Cantor é quase inexistente depois da n-ésima interação. No último exemplo, percebe-se a diferença das dimensões. Portanto, os objetos não possuem a mesma dimensão do espaço.

BIBLIOGRAFIA

STAHLKE, T. M. Geometria Fractal: Um estudo da teoria de taxonomia baseado no processo de geração. Dissertação defendida na Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, 1993.

JANOS, M. Geometria Fractal. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
GUILLEN, M. Pontes para o infinito: o lado humano das matemáticas. 2.ed. Lisboa: Gradiva, 1998.
NUNES, R.S.R. Geometria Fractal e Aplicações: Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006.
http://www.silvestre.eng.br/astronomia/artigos/bigbang. Acessado em: XX/09/2011.