

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE PESQUISA OPERACIONAL: PROGRAMAÇÃO LINEAR E O USO DO SOFTWARE WXMAXIMA

Tais M. Moreira Cruvinel¹; Erivelton De Oliveira Alves²

¹Discente do curso de Matemática da Universidade Estadual de Goiás Câmpus Santa Helena de Goiás

²Docente da Universidade Estadual de Goiás, Câmpus Santa Helena de Goiás

RESUMO: A Programação Linear é uma ferramenta da Pesquisa Operacional aplicada à solução de problemas que objetivam a otimização de um sistema de estudo. O presente trabalho buscou mostrar algumas aplicações da Programação Linear e como ela pode ser solucionada com o auxílio do software wxmaxima. Foram abordados dois métodos de resolução de problemas de Programação Linear, o método de Resolução Gráfica, e a forma algébrica de solução que é o Método Simplex. Com a finalidade de solucionar com auxílio desses dois métodos, problemas de otimização com duas ou mais variáveis, afim de maximizar custos e minimizar prejuízos. Problemas de otimização com várias variáveis como forma de contribuir com uma abordagem diferente, visando despertar a aplicabilidade da matemática em vários setores como: engenharia de produção, administração, logística, economia.

PALAVRAS CHAVE: Programação Linear; Método Gráfico; Problemas de otimização; Método Simplex.

AN INTRODUCTORY STUDY ON OPERATIONAL RESEARCH: LINEAR PROGRAMMING AND THE USE OF WXMAXIMA SOFTWARE

ABSTRACT: Linear Programming is a tool of the Operational Research applied to the solution of problems that aim at the optimization of a study system. The present work sought to show some applications of Linear Programming and how it can be solved with the help of wxmaxima software. Two methods of solving Linear Programming problems, the Graphical Resolution method, and the algebraic form of solution that is the Simplex Method were discussed. With the purpose of solving with these two methods, optimization problems with two or more variables, in order to maximize costs and minimize losses. Problems of optimization with several variables as a way to contribute to a different approach, aiming to awaken the applicability of mathematics in several sectors such as: production engineering, administration, logistics, economics.

KEYWORDS: Linear Programming; Graphic Method; Optimization problems; Simplex Method.

INTRODUÇÃO

Pesquisa Operacional (PO) é a ciência que pratica a tomada de decisão, ela surgiu durante a segunda Guerra Mundial, quando os combatentes tinham pouco mantimento em estoque e precisavam se ordenar de maneira que não faltasse alimento a todos. Dessa forma,

trata-se de uma área do conhecimento que envolve situações de otimização de processos para a tomada de decisões (MARTINS, 2011). Nessa área do conhecimento, a problematização e a formulação matemática de alguma situação que possa ser otimizada, são bastante comuns. As soluções desses problemas darão suporte para a tomada de decisões dentro de uma organização administrativa. Pode-se ilustrar como exemplos problemas do tipo: manejo de estoque, produção de determinados produtos, gerenciamentos de horários, controle de matéria prima evitando o desperdício, entre outros.

Uma das principais técnicas na área de PO é a Programação Linear (PL), a qual visa a otimização de um problema, cujo foco principal é a maximização de lucros e a minimização de custos ou prejuízos.

O objetivo geral desse trabalho foi estudar problemas de Programação Linear, que envolvem máximos e mínimos de funções, e propor a utilização de recurso matemático que possa se tornar uma alternativa para encontrar a solução desses problemas utilizando o software wxMaxima.

E os específicos: conhecer a Pesquisa Operacional e suas atribuições no campo matemático;

- Estudar os principais métodos de solução de problemas de programação linear, especificamente o de Gráfico e o Simplex;
- Estudar as funcionalidades do software wxMaxima;
- Utilizar o software para obter soluções dos problemas abordados na área de Pesquisa Operacional.

Analisando como um licenciado em Matemática pode atuar na área administrativa, questiona se: Como a formação em Matemática e o uso da tecnologia podem auxiliar na resolução de Problemas de Programação Linear?

A principal hipótese é que o aprimoramento dos estudos de modelos matemáticos pode favorecer o setor administrativo, associando o uso de *softwares*, para a melhoria de processos.

Portanto, esse trabalho consiste em abordar problemas típicos, os quais podem ser solucionados via programação linear, com ênfase em situações que envolvam maximização ou minimização. Para isso, será proposto a utilização de um software para facilitar essa tarefa e permitir que sejam abordados problemas que contenham muitas desigualdades ou restrições.

A realização desse trabalho justifica-se sobretudo, pela importância de se conhecer áreas afins de atuação, nesse caso a área de Pesquisa Operacional. A PO trata de modelagem matemática de fenômenos estáticos ou dinâmicos que podem aparecer nas áreas de Engenharia

de Produção, Ciências Contábeis, Administração e Economia por exemplo. Esse caráter multidisciplinar chamou a atenção para o estudo sobre esse tema, o qual é bastante amplo e de muitas aplicações.

MATERIAIS E MÉTODOS

O presente trabalho representa uma revisão bibliográfica sobre os problemas de programação linear e suas aplicações em Pesquisa Operacional. Ao longo do estudo, será implementada o uso de uma ferramenta de computação algébrica, o *software* wxMaxima, como recurso para obtenção de solução dos problemas abordados.

Na primeira etapa do trabalho, serão estudados os principais conceitos de Pesquisa Operacional, os problemas de programação linear, os métodos e algoritmos de solução. Na etapa seguinte, será analisado de maneira geral o *software* wxMaxima, suas ferramentas e possibilidades para obtenção de soluções numéricas. A etapa final, apresentará os principais métodos de solução de problemas em programação linear com o uso do *software*.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Pesquisa Operacional é a ciência que pratica a tomada de decisão, ela surgiu durante a segunda Guerra Mundial, quando os combatentes tinham pouco mantimento em estoque e precisavam se ordenar de maneira que não faltasse alimento a todos. Dessa forma, trata-se de uma área do conhecimento que envolve situações de otimização de processos para a tomada de decisões. De acordo com Marins (2011, p.13):

A PO é uma ciência aplicada que utiliza técnicas científicas conhecidas (ou as desenvolve quando necessário), tendo como ponto de referência a aplicação do método científico. A PO tem a ver, portanto, com a pesquisa científica criativa em aspectos fundamentais das operações de uma organização. (MARINS, 2011, p.13).

A pesquisa Operacional é a problematização e a formulação da coleta de dados que permite a aplicação de um recurso matemático que melhor atenda uma necessidade administrativa. Neste sentido, o termo operacional está relacionado a uma forma de execução de uma tarefa e habilidade de resolução de um determinado problema.

Segundo Andrade (2000, p.07) a relevância da Pesquisa Operacional está “na sua influência sobre o modo pelo qual os administradores abordam os problemas, na maneira como os formulam, na avaliação que fazem do relacionamento com outros problemas e na forma

usada para sua comunicação a outras pessoas”. Sendo assim, a importância da PO está nos detalhes que antecedem a sua operação, como a tomada de decisão e a caracterização de todas as suas etapas de solução do problema.

A programação matemática é ampla e requer dos gestores empresariais o uso de recursos tecnológicos e consequentemente eliminar os fatores de risco que possam ser prejudiciais para o crescimento, todo este percurso são detalhados para a melhor tomada de decisão, o que requer habilidade de resolução sobre o problema exposto.

Deste modo, a principal técnica na área de Pesquisa Operacional é a Programação Linear, a qual é uma abordagem que visa a otimização de um problema, onde o seu foco principal é a maximização de lucros e a minimização de custos. Portanto, este estudo pode haver restrições e seu objetivo principal é a otimização da situação do problema.

A Programação Linear surgiu como uma ferramenta de auxílio na modelagem matemática. A partir do século XVIII, que o físico e matemático Jean Baptiste Joseph Fourier, desenvolveu métodos para a resolução e sistemas de inequação. Nesse sentido, durante a 2ª Guerra Mundial foi utilizado pelos militares para a resolução de problemas que envolviam a divisão dos mantimentos. Com o fim da guerra em 1947 a PO tornou-se uma ferramenta de auxílio, a partir deste período a tecnologia vem se tornando aliada a modernidade da sociedade.

A Pesquisa Operacional tal qual como a conhecemos surgiu durante a Segunda Guerra Mundial tendo como objetivo o desenvolvimento de metodologia para solução de problemas relacionados com as operações militares quando os Aliados se viram confrontados com problemas complexos de natureza logística, tática e de estratégia militar (CARDOSO, 2011. p.04).

Deu início a uma nova transformação tecnológica a partir da Segunda Guerra Mundial, período de grandes conflitos, que a sociedade se deparava com um momento de evolução. Na contemporaneidade, diversas empresas aderiram ao uso de recursos e mídias na capacitação do servidor, dando-lhe a oportunidade de contribuir para a prosperidade no setor, este acesso é facilitador e desenvolve a credibilidade no mercado.

A demanda da civilização exige uma transformação contínua no processo tecnológico e tem validade ao ponto que os sistemas estão em constantes mudanças, onde a tecnologia utilizada neste período, pode não ter a mesma utilização nos próximos anos, tornando-a obsoleta, como exemplo, são os *disquetes*, que foram substituídos por *pen drives*.

Esta demanda acredita que o setor empresarial está em expansão e é notório a implementação de modelos matemáticos que possam viabilizar a redução de problemas, estes programas são definidos através da necessidade da produção e o setor operacional.

São utilizados diferentes recursos tecnológicos que trabalhem a resolução destes problemas, como a planilha do Excel, que lançando os dados corretamente ela estabiliza condições que podem ser favoráveis ou não, entre outros softwares como, Lindo, Splint, os quais ressaltam as aplicações e demonstrações do wxMaxima, suas plataformas e a resolução passo a passo na programação linear.

A Programação Linear consiste em um método para resolução de problemas de otimização com restrições em que a função objetiva e linear é descrita através de uma inequação admitindo suas restrições por meios que são anexadas ao ($x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b$).

Suas variáveis de folga são representadas através do $Xf_1, Xf_2, \dots, Xf_n$, em seu critério desempenha a maximização de ganhos e minimização de perdas ou desperdícios. Para a transformação de maximização para minimização a mudança realiza através da propriedade:

Maximizar: $(f(x))$ corresponde a. Minimizar $(-f(x))$ e Minimizar $(f(x))$ corresponde a maximizar $(-f(x))$.

Neste trabalho, será abordado o estudo do *Software* wxMaxima e sua aplicação em matemática, o mesmo pode ser instalado em várias plataformas, tanto nos Sistemas Operacionais Windows quanto em Linux.

O wxMaxima é um sistema para manipulação de expressões numéricas incluindo, diferencial, integral, sistemas de equações lineares, vetores e matrizes. Esse *software* possui uma variedade de comandos para fins matemáticos e aplicações, trabalhando o uso de dados e exposições dimensionais e tridimensionais.

O mesmo é um *software* livre, e foi criado pela Free Software Foundation, e pode ser instalado, explorado e distribuído sem restrição. O Maxima é derivado do sistema Macsyma de álgebra computacional desenvolvido entre os anos de 1968 e 1982 no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) como parte do Projeto MAC (GESE, 2012).

O MIT repassou uma cópia do código fonte do Macsyma para o Departamento de Energia em 1982, dessa forma esta versão conhecida agora como Macsyma DOE. Mantida assim uma cópia com o professor William F. Schelter da Universidade do Texas entre 1982 até seu falecimento em 2001. No ano de 1998, o Departamento de Energia autorizou Schelter a disponibilizar o código fonte do Macsyma DOE sob a Licença Pública GNU (portanto um Software Livre), posteriormente no ano de 2000 ele iniciou o projeto Maxima no Source Forge para manter e desenvolver o Macsyma DOE, agora chamado Maxima (GESE, 2012).

O Maxima é um Sistema de computação algébrica (CAS - do inglês Computer Algebra System) derivado do sistema Macsyma, desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) como parte do projeto MAC. Esse tipo de

software nos permite manipular expressões matemáticas, plotar gráficos em duas ou três dimensões e, no caso do Maxima, além das inúmeras vantagens comuns aos demais CAS's ele ainda é um *software* livre. O wxMaxima pode ser executado em vários SO's como Windows, Linux e MacOS X. O instalador do wxMaxima para Windows e Linux. (GESE, 2012, p.4).

Esse *software* é um sistema de computação algébrica, que admite ao usuário manipular expressões matemáticas e explorar de maneira simbólica e interativa algo que fazendo manualmente não conseguiria ser solucionado de modo rápido e seguro. O usuário digitaliza na janela do programa algumas fórmulas, comandos, e o sistema faz o cálculo necessário para o problema indicado e obter soluções numéricas aproximadas e visualizar graficamente.

No mundo digital existem vários recursos disponibilizados para auxiliarem as pessoas em diversas áreas, tanto para controlar algo ou auxiliar na tomada de decisão, é o caso dos *Softwares* que são programas de computadores. Uma área que se beneficiou com a utilização dos *softwares* foi a Educação. Inicialmente, o uso de programas de computador para as escolas se deu na parte administrativa, com o objetivo de organizar, controlar e agilizar o acesso a dados e informações cotidianas. Houve então, a ideia e a intenção de desenvolverem *softwares* para a aplicação didática e assim contribuir com a consolidação do ensino aprendizagem.

O setor administrativo vem utilizando a Programação Linear (PL) para se reorganizar, adquirindo novos hábitos de planejamento, sua estratégia parte do pressuposto para a resolução de problemas de otimização e adaptar as características do problema em um modelo matemático abstrato, composto por: função-objetivo; e, um conjunto de restrições, adicionando um recurso matemático de resolução que contribui com todos os fatores que possam conduzir a um bom desempenho.

O método proposto para a devida resolução será o Simplex que tem por característica solucionar um problema de programação linear composto por duas variáveis.

A programação Linear pode ser resolvida com diversas ferramentas, tais como, planilha do Excel e softwares como: Lindo e Splint, porém o trabalho abrangerá o uso do programa wxMaxima por ser disponível gratuitamente em diferentes plataformas computacionais e tem um seguimento amplo do conteúdo matemático capaz de solucionar de inúmeras expressões.

Dentre os diversos modelos já citados, concentraremos nossa atenção inicialmente no *modelo de Programação Linear* (PL). Esse modelo é básico para a compreensão de todos os outros modelos da Programação Matemática. Os conceitos nele firmados serão estendidos aos demais, concedendo suporte a estudos mais avançados. Uma outra vantagem desse modelo está na extraordinária eficiência dos algoritmos de

solução hoje existentes, disponibilizando alta capacidade de cálculo e podendo ser facilmente implementado até mesmo através de planilhas e com o auxílio de microcomputadores pessoais (GOLDBARG; LUNA, 2005, p.25).

Acreditando em sua funcionalidade, a Programação Linear, abrangerá diversos métodos de resolução através de modelos como planilhas. Os *softwares* educativos cooperam com o ensino-aprendizagem de maneira qualitativa e interativa que proporcionam um desenvolvimento cognitivo que parte do concreto ao abstrato, com vista a melhorar a capacidade de interagir, operar e se adaptar com as ferramentas disponíveis na sociedade atual, e em alguns casos proporcionam a melhoria do processo de cálculos ou visualização de gráficos. De acordo com Santos (2009, p.11),

Um sistema de computação algébrica, como o MAXIMA, permite manipular e explorar expressões matemáticas de maneira simbólica e interativa. O usuário digitaliza na janela do programa algumas fórmulas, comandos e o sistema avalia-os devolvendo uma resposta que pode ser manipulada posteriormente, caso seja necessário. É permitido também obter soluções numéricas aproximadas e visualizar graficamente quer dados, quer funções matemáticas. O MAXIMA, como se trata de um *software* do tipo - “freeware”, com funcionalidades similares aos *softwares* comercializados, não estimula o uso de cópias não autorizadas (SANTOS, 2009, p.11).

Esta conjunção parte do manuseio de técnicas para a elaboração, onde sua contribuição aprimora o conceito básico e avançado de PL. A Programação Linear consiste em um campo de estudo da PO, onde se objetiva a otimização de resultados. Algumas técnicas são necessárias para desenvolver tais problemas a partir de um modelo já determinado, sendo elas: Programação Linear, Teoria dos Estoques, Teoria das Filas, Programação Dinâmica, Teoria dos Jogos. A programação Linear aborda diferentes maneiras de resolução que são vistas em Pesquisa Operacional, detalhadamente sua maneira de resolução e, seu objetivo principal tem o foco em otimizar uma solução:

Otimizar de acordo com Goldbarg e Luna (2005, p.34):

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad i = p + 1, p + 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, q \\ x_j &\in \mathbb{R}, j = q + 1, q + 2, \dots, n \end{aligned}$$

Serão seguidas as seguintes notações:

$M = \{1, 2, \dots, m\}$, o conjunto dos índices das restrições do problema;

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto dos índices das variáveis.

$M_1 \sqsubset M$ e $N_1 \sqsubset N$;

$A = \{a_{ij}\}$ matriz de restrições;

$a_j \equiv$ j-ésima coluna de A ;

$x = (x_j)$, $j \in N$ vetor coluna de n componentes;

$c = (c_j)$, $j \in N$ vetor linha de n componentes;

$d = (d_i)$, $i \in M$ vetor coluna de m componentes.

O conceito otimizar é apresentado para demonstrar as possibilidades de maximizar ou minimizar a função objetiva. “O problema consiste em dados a matriz A e os vetores b e c , achar o vetor de variáveis contínuas x que satisfaçam ao conjunto de restrições e que otimize o valor do critério z ” (GOLDBARG; LUNA, 2005, p.34)

Dentre estas diversas técnicas, a Programação Linear viabiliza solucionar diferentes situações na área administrativa. Para a resolução destes problemas são utilizados “inúmeros métodos de resolução como o Método Gráfico, que permite identificar um setor de problemas para que tornem fácil a compreensão”, a partir deste princípio observa-se algumas características:

O método gráfico consiste em, primeiramente determinar o conjunto de todas as possíveis soluções para o problema, determinado pelo sistema de restrições, e dentre estas identificar aquela onde ocorre o valor ótimo, avaliado pela função objetivo (CARDOSO, 2011. p.48).

O Método gráfico é a interpretação visual através de gráficos, sendo representada a solução de otimização do problema, podendo ser inseridas apenas duas variáveis e serão traçados os pontos em conjunto, tornando possível a verificação do ponto de otimização, examinando se o problema consta apenas uma solução, múltiplas ou inexistente.

Outro Método estudado é o Simplex que é utilizado na programação linear como forma de desempenhar a resolução do problema, nesse método são aplicadas em funções objetivas, com duas variáveis ou mais, onde não há negatividade e permite as folgas de ambas as partes no sistema de inequações de 1º grau, sua utilização é dada onde os valores poderão ser ajustados.

É nesse contexto que o *algoritmo simplex* se destaca como uma das grandes contribuições à Programação Matemática deste século. Trata-se de um algoritmo geral *extremamente eficiente* para a solução de sistemas lineares e adaptável ao cálculo computacional (apesar de algumas dificuldades clássicas), e cuja compreensão funcional embasará vários outros métodos. O estudo desse algoritmo é indispensável para o profissional que deseja dominar as técnicas quantitativas de *análise e solução*

de problemas em um contexto razoavelmente avançado (GOLDBARG; LUNA, 2005, p.98).

Na programação Linear o Método Simplex disponibiliza um critério para solucionar problemas de PL, onde apresentam diversas variáveis que contribuam com a solução do problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma possibilidade de aplicação de problemas de otimização. Por se diferenciar-se e serem contextualizados, os problemas em Programação Linear podem ser utilizando o Método Gráfico que possibilita explorar importantes conceitos básicos da Matemática do Ensino Médio. Conteúdos como desigualdades, função do primeiro grau, representação gráfica de equações. A aplicação desse método permite destacar a importância da análise do gráfico para a obtenção da melhor solução possível, de acordo com as condições impostas pelo problema.

O Método Simplex possibilitou uma abordagem significativa de alguns conceitos relativos a sistemas lineares a partir da contextualização do problema. Como o nome sugere, este método simplifica bastante a solução de problemas de otimização, porém, quando o problema abordado apresenta um número excessivo de variáveis. A quantidade de cálculos pode tornar-se muito grande para ser realizada de forma manual. Por esse motivo, sugere-se a utilização de ferramentas, softwares para a resolução que permitem que os solucionem mais rapidamente esse tipo de problema.

Acredita-se que devido à natureza dos problemas de otimização, em que inúmeras soluções são possíveis, o uso do software wxmaxima, soluciona com êxito os diversos tipos de problemas propostos, tanto o método gráfico, quanto ao simplex.

REFERENCIAS

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. **Introdução à Pesquisa operacional: métodos e modelos para análise de decisão**. 2 ed. São Paulo: LCT, 2000

CARDOSO, Andréa. **Fundamentos Da Pesquisa Operacional**. Unifal.MG, 2011.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

GESE (Grupo de Estudo de Software no Ensino). **wxMaxima**: Software Livre para o ensino e aplicações da Matemática. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia, 2012.

GOLDBARG, Marco Cesar; LUNA, Henrique Pacca L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**: Modelos e Algoritmos. 2 ed. Elsevier: Rio de Janeiro, 2005.

MACÊDO, Bruno F. Milaré. **MAXIMA 5.9.2 Para Windows**. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~marcio/tut2005/maxima/042290Bruno.pdf>>. Acesso em 10/04/2017.

MARINS, Fernando Augusto Silva. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2011.

SANTOS, Bruna. **Introdução ao Software Maxima**. Centro de Matemática da Universidade do Porto, 2009.